

POLYGO (23 juin 2026)

p 1	Généralités sur les pavages
p 2	Le jeu PolyGo et ses déclinaisons (TetraGO, HexaGO-TriaGO). Dualité des graphes
p 4	Hex multi-joueurs : Hex-2, Hex-3, ..., Hex-n
p 6	TetraGo et ses variantes : pavages arithmétiques et de Fibonacci (Les Carreleurs, Blocs)
p 7	Ponts et Barrages. Les Nombres Croisés. Les Carreleurs. Blocs.

Les termes nouveaux sont écrits en *italique rouge* puis repris en *italique noir*. Les *commentaires sont en bleu*

Terminologie des Pavages

Ce premier paragraphe explicite des termes courants pour les jeux de pions.

On ne redéfinit pas les polygones et l'incidence entre leurs composants (sommets ou arêtes) est formulée simplement si aucune ambiguïté n'est à craindre (on dira par exemple: "une arête de R" au lieu de "une arête incidente à un polygone de la région R").

Un **pavage P** plan (*ou de dimension 2*) est un ensemble de *polygones* dits aussi *cellules*, bordées par des *arêtes*, dont les extrémités sont ses *sommets*. Elles satisfont aux deux propriétés

- P1.** Chaque *arête* de **P** est incidente à une ou deux *cellules* de **P**
- P2.** Deux *arêtes* de **P** sont incidentes à, au plus, une *cellule* de **P**

Chaque *cellule* possède une couleur associée aussi à un pays et un joueur. Les blanches, dites aussi *maritimes*, ou *inoccupées*, forment l'*océan* et les autres, dites *terrestres* forment la *terre*. Deux *cellules terrestres* sont *alliées* si elles sont de même couleur et *adversaires* dans le cas contraire. De même l'ensemble des *adversaires* d'un ensemble J de joueurs est son complémentaire J'.

2. Distance, liaison, connexité,, séparation, barrage

Deux sommets (resp. arêtes) distinct(e)s sont *voisin(e)s* si ils (elles) partagent une même arête (resp. un même sommet). Une suite d'arêtes (ou sommets) successivement *voisin(e)s* est une *ligne*, dite *fermée*, ou *lacet* si la première et la dernière sont *voisines* ou confondu(es). De même deux *cellules* distinctes sont *voisines* lorsqu'elles sont séparées par une arête commune, et une suite de *cellules* successivement *voisines* est un *chemin*, dit *fermé*, ou *circuit* si la première et la dernière sont *voisines* ou confondues.

3. Bord, Contour, Clôture, Frontière, Intérieur, Province, Région, Péninsules, Littoral

Une partie L du plateau B est un *lien* entre deux parties A et B si elle contient une partie connexe voisine de A et B. De plus L est un *joint* s'il est de cardinal minimal, dit alors *distance* entre A et B. Pour toute partie P du plateau B, les *arêtes* séparant deux cellules voisines de cette partie P sont dites *internes* à P, les autres formant sa *clôture*. La partie commune des clôtures de deux régions est la *frontière* les séparant. Les cellules de P dont toutes les arêtes sont *internes* à P sont dites à l'*intérieur* P^o de P. Les autres forment son *bord* $b(P)$ tandis que son *contour* $c(P)$ est le *bord* de sa partie complémentaire P^c

Une composante connexe d'un pays est une *province*, également appelée *péninsule*, lorsqu'elle est *au bord* du plateau **P**. Leurs cellules forment le *littoral* **L** et sont dites *solides* (les autres étant dites *fragiles*). Le *littoral* est donc la réunion de toutes les *péninsules*. De même, une composante connexe de l'océan est une *province maritime* dite *mer* lorsqu'elle est *au bord* du plateau, et un *lac* dans le cas contraire.

4. Région, Province cernée, libre ou isolée

Enfin une *région* **R** est une réunion de *provinces*. Elle est *terrestre* (resp. *maritime*) si toutes ses *cellules* le sont. *Remarquons que la classe des régions est stable par les opérations ensemblistes usuelles, en particulier le complémentaire R^c d'une région en est une.*

La *frontière* séparant deux régions est la partie commune de leurs *clotures*. Une *région fragile* non vide du plateau est dite *cernée* si son *contour* est *solide* et son *bord* est *terrestre* (*).

Une *province* de J est *libre* tant qu'il peut la *relier* à son *J-littoral*. Elle est *isolée* dans le cas contraire

(*) Attention :

Même cernée par un ensemble J de joueurs, une région R peut contenir des cellules de couleur dans J (voir l'exemple ci-contre)



POLYGO *(pour deux joueurs ou plus)*

Dans ce document, on propose deux modèles de plateaux, qu'on adapte à différents jeux de pions. Le premier, TetraGo repose sur une trame carrée et le second HexaGo, sur une trame hexagonale. Les jeux développés sur ces plateaux rappellent les classiques jeux de Go ou de Hex, ce qui explique la terminologie retenue.

1. But et Déroulement du jeu

Le jeu se déroule entre plusieurs joueurs représentés par des couleurs (*autres que blanc*), sur un plateau **P** muni d'un pavage arbitraire. Les *cellules* inoccupées dites aussi *maritimes*, sont blanches. Initialement, les cellules *terrestres* forment une partition du *bord* du plateau par des *provinces* dites *ports* attribués à chacun des joueurs

Le but du jeu est d'obtenir le plus grand pays. Voici son déroulement :

Tant qu'il reste des cellules vides libres

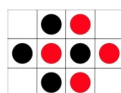
- 1 À son tour chaque joueur J pose un pion sur l'une d'elles
- 2 On vide du plateau les régions *cernées*, puis on passe au joueur suivant (*)

(*) Lorsque le jeu s'arrête il n'y a plus de cellule vide libre, donc le contour, $c(L)$ du littoral est terrestre, si bien que **L** cerne son complémentaire L^c qui est alors vidé de ses pions (par la règle 2) et ne contient pas cellule terrestre. Une cellule ne pouvant être simultanément vide et terrestre, le contour $c(L)$ de **L** est vide, montrant ainsi que **L** couvre le plateau.

Le gagnant possède le plus grand pays

Quelques remarques

- Dire qu'il n'y a plus de cellule libre, revient à dire que le littoral **L** cerne son complémentaire L^c
- Au jeu de Go (deux joueurs), les pions encerclés sont retirés du jeu, puis réintroduits en fin de partie pour faciliter le décompte des points. Dans le jeu **PolyGo**, ils prennent immédiatement la couleur de leur assaillant
- Au jeu de Go les provinces contenant "deux yeux" sont protégées tandis que pour **Polygo** les provinces protégées sont les péninsules (*rattachés au bord du plateau, donc faciles à identifier*), mais une province **P** de **J** contenant deux yeux **n'est plus nécessairement protégée** car, si **P** n'est pas une péninsule, un pion placé dans l'un d'eux n'est pas immédiatement capturé et remplacé par un pion de **J**.
- Certaines configurations du jeu de Go sont ambiguës si on ne sait pas dans quel ordre ont été posés les pions. Par exemple dans la situation qui suit, au Go, on ne peut pas savoir lequel des deux pions centraux est capturé si on ne sait pas dans quel ordre ils sont posés. Alors que pour PolyGo, si les 6 pions extérieurs sont solides, les deux pions centraux sont supprimés et la situation ne peut pas se reproduire

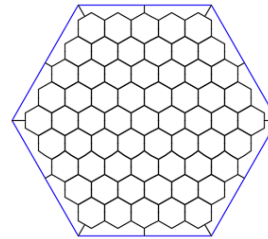
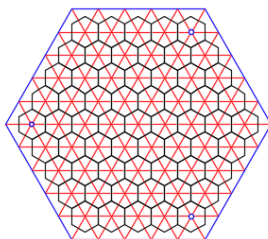
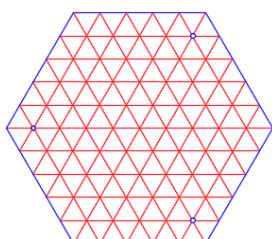


- Le jeu PolyGo peut se dérouler sur un pavage arbitraire avec plus de deux joueurs, et une initialisation arbitraire des couleurs des bords du plateau, laquelle permet de moduler les handicaps, pour des joueurs de niveaux distincts

- Pour le jeu Polygo une tactique *défensive* prudente semble être de toujours jouer ses pions au voisinage d'une de ses péninsules... mais les adversaires peuvent fabriquer des lacs qui sont des pièges redoutables.

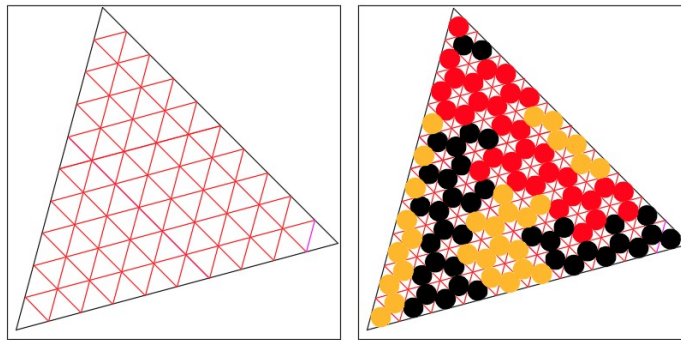
-- Symétrie et dualité

Remarquons que les pavages hexagonaux (**hexago**) et triangulaires (**triago**) étant chacun dual de l'autre, un même plateau convient pour les deux jeux puisque la seule différence vient du positionnement des pions de jeu sur le plateau, au centre des polygones ou sur leur sommets comme le montre cette représentation simultanée des deux pavages de l'hexagone.

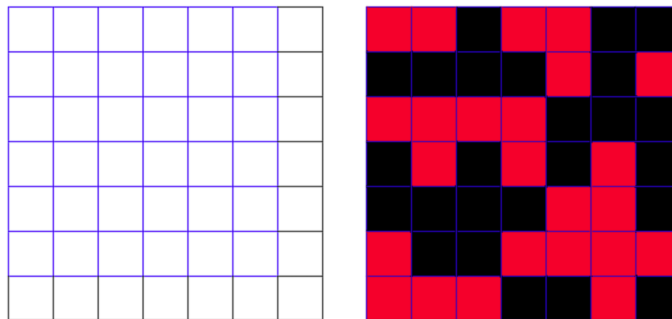


Voici quelques exemples (fictifs) de début et fin de partie se déroulant sur un plateau de pavage triangulaire (**Triago**), carré (**TetraGO**) ou hexagonal (**Hexago**)

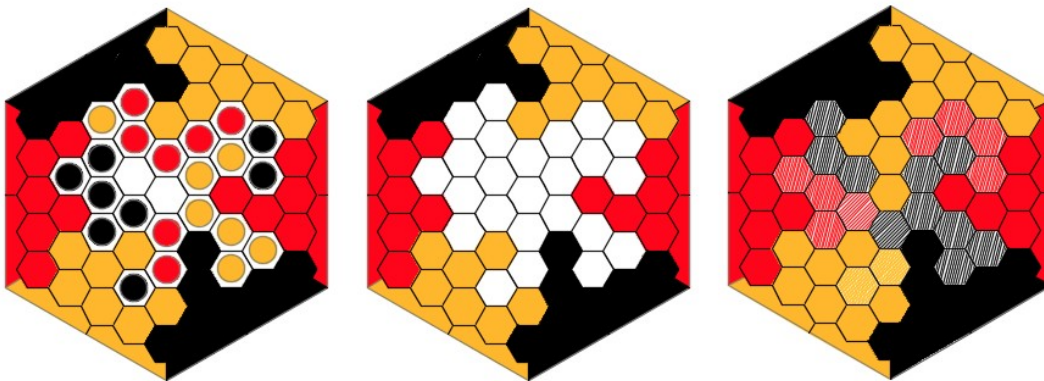
...Triangulaire (**TriaGO**),...



... carré (**TetraGO**),...



.... ou hexagonal (**HexaGO**)



Ci-dessus Trois étapes d'une partie à trois joueurs (GO3) sur un plateau HexaGO

Image 1

Le littoral L (pions solides) cerne les pions fragiles (représentés par les jetons de couleur) et les deux cellules vides restantes, libres pour aucun des joueurs, sont isolées

Image 2

Donc les pions fragiles (et isolés), sont supprimés du plateau et la partie reprend.

Image 3

Lorsque le plateau est couvert par le littoral (les péninsules solides), le gagnant possède le plus grand pays (les pions grisés ont été posés après la deuxième étape)

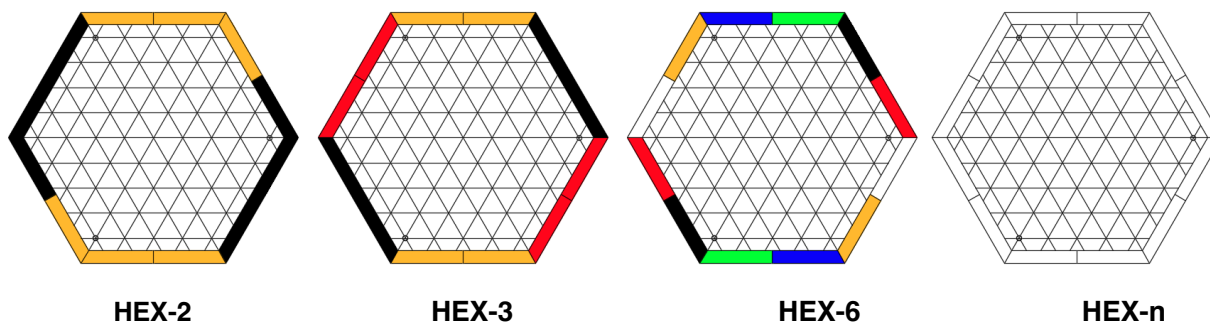
On montre maintenant comment la forme hexagonale du plateau permet d'adapter les règles d'autres jeux classiques à trois joueurs ou plus (par exemple Hex)

HEX-n généralise à plus de deux joueurs le classique jeu de Hex (voir 5 (*), un peu plus loin)

Sur un plateau hexagonal chaque joueur J dispose de deux *ports* diamétralement opposés qu'il tente de relier par un chemin continu de pions de sa couleur (dit aussi *diamètre* de J). Dès que ses adversaires forment un barrage rendant ce but impossible, il *abandonne* la partie bien que ses pions restent sur le plateau, et le jeu continue entre ses adversaires. Sinon il pose un pion où bon lui semble sur une *cellule libre* du plateau.

Le gagnant, qui existe nécessairement, relie ses deux ports par un diamètre, barrant du même coup la route de ses adversaires.

Ci-dessous quelques dispositions initiales d'un plateau (correspondant au nombre n de joueurs)



a. HEX-2 Le bord du plateau est divisé en quatre ports disposés symétriquement (*voir la première image*). On retrouve le jeu classique de Hex pour lequel, tout plateau rempli, même aléatoirement, détermine un gagnant qui relie ses deux ports et élimine donc son adversaire.

b. HEX-3 et HEX-6 généralisent Hex-2 à trois ou six joueurs. Mais, si un plateau rempli aléatoirement ne détermine plus nécessairement un gagnant (traçant un diamètre), les abandons successifs des perdants assurent la victoire du dernier survivant qui trace donc un diamètre de sa couleur.

c. HEX-n apporte une variante intéressante : les couleurs des ports ne sont pas initialement attribuées, mais dès que deux d'entre eux sont reliés par un chemin de couleur J, ils adoptent immédiatement cette couleur J

Remarques

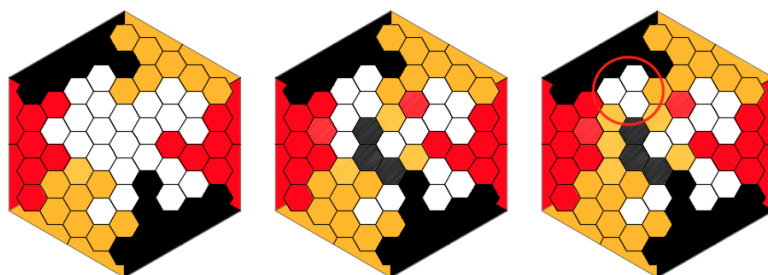
1. Pour les petits plateaux (H5 ayant cinq cellules sur chaque arête) le jeu est rapide (5 à 10 minutes), mais se complique avec la taille du plateau pour devenir un jeu de réflexion assez complexe (H7 ou plus grand)

2. Il est facile de voir que deux diamètres distincts du plateau se coupent nécessairement, donc si un joueur J trace un diamètre, les autres, ne pouvant plus y parvenir, abandonnent et J gagne la partie

3. La règle du swap

Le premier qui joue se trouve un peu avantagé (notamment s'il prend la position centrale), ce qui est particulièrement sensible quand on joue sur un «petit plateau». Aussi, pour compenser cet avantage, on introduit une règle dite du *swap* (*): après le premier pion posé (par le joueur 1), si le joueur 2 trouve le coup intéressant, il peut prendre la place du joueur 1 (et son premier coup). Ainsi, pour commencer, le joueur 1 doit choisir une *cellule* suffisamment bonne pour lui, mais pas trop pour éviter que son adversaire prenne sa place, ce qui équilibre le jeu. (*) Une *swap* consiste à interdire aux joueurs de poser leur premier pion au centre du plateau

4. Exemple montrant trois étapes clés d'une partie de Hex-3 (trois joueurs)



Ci dessus

trois étapes d'une partie à trois joueurs Hex-3

Etape 1 Chaque joueur peut gagner

Etape 2 Ne pouvant plus joindre ses deux ports, le joueur rouge est éliminé

Etape 3 Noir ou Jaune gagne en 1 ou 2 coups en jouant dans l'une des cellules encadrées

5. Les articles sur le jeu Hex sont nombreux (*commencez par wikipédia ou recherchez simplement «jeu de Hex » dans votre navigateur*)

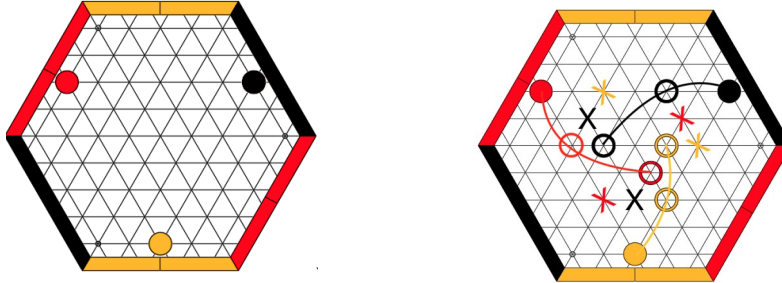
QUELQUES VARIANTES et AUTRES RÈGLES *(envisageables sur un plateau PolyGO)*

1. Labyrinthe est une variante du jeu Quoridor (se déroulant, lui avec deux joueurs sur un plateau carré)

On y joue à plusieurs joueurs sur un plateau se présentant comme celui de Hex

Chaque joueur dispose d'un «Roi» voisin d'un port . Son but est de lui faire traverser le plateau pour rejoindre le port opposé. A son tour, il peut :

- Déplacer son Roi sur une *cellule libre* voisine, ou
- Poser une **Pierre (X)** sur une *cellule libre* du plateau, la rendant ainsi inutilisable dans tous les déplacements des rois. Cette pose est définitive.



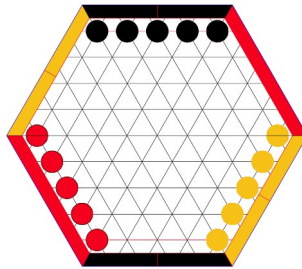
Sur ces deux dessins on essaie de représenter les déplacements des rois et les pierres obstacles (X, X, X)

La difficulté, pour chaque joueur, est de choisir, à son tour, s'il est préférable d'avancer son roi ou de gêner un adversaire en posant une pierre sur son chemin.

Pour que le jeu se termine toujours par un roi gagnant on doit y ajouter deux règles

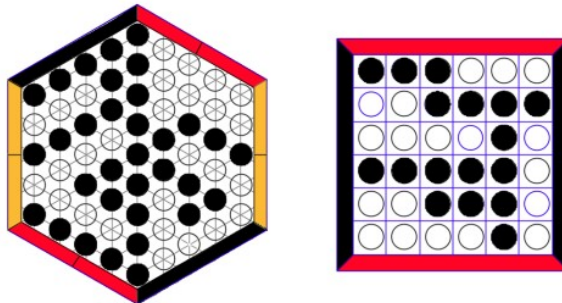
1. L'interdiction de poser une pierre barrant définitivement tout chemin gagnant d'un roi
2. Lorsque deux rois sont voisins celui qui joue peut choisir d'échanger leur position (ce qui permet leur croisement même sur une voie étroite)

2. HexaDames est une variante du jeu de Dames adaptée à trois joueurs, sur le plateau Hexago
En début de partie, chacun range ses pions sur une arête du plateau comme sur cette image (*).



Chaque joueur tente de transférer ses pions sur l'arête opposée en les déplaçant, à son tour, d'un seul pas, sauf pour manger un ou plusieurs pions adverses en sautant par dessus (à «saute mou-ton » comme au jeu de *Dames* traditionnel). Le gagnant est le joueur qui transfère le plus de pions d'un bord à l'autre

3. Le Bowling, variantes du jeu de Marienbad (https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Marienbad)

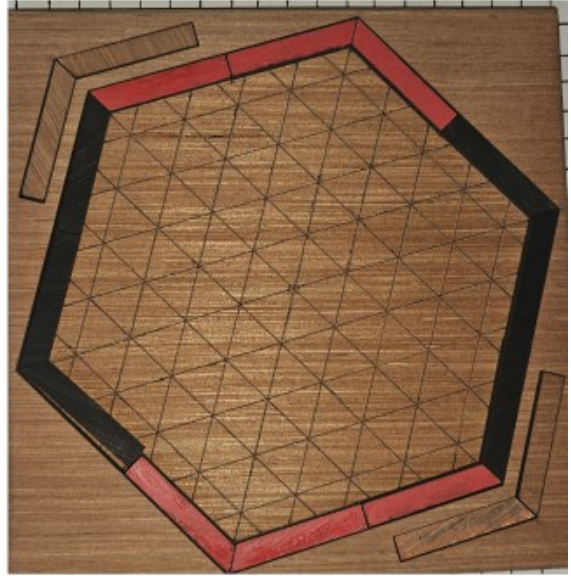
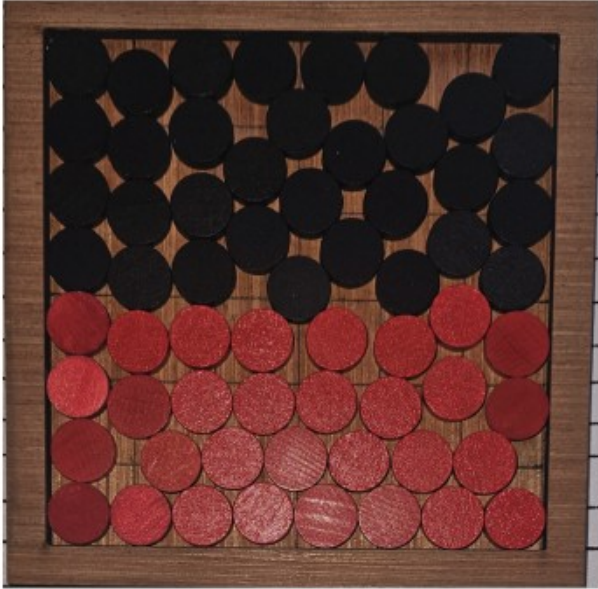


Exemples de parties en cours sur les plateaux HexaGo et TetraGo

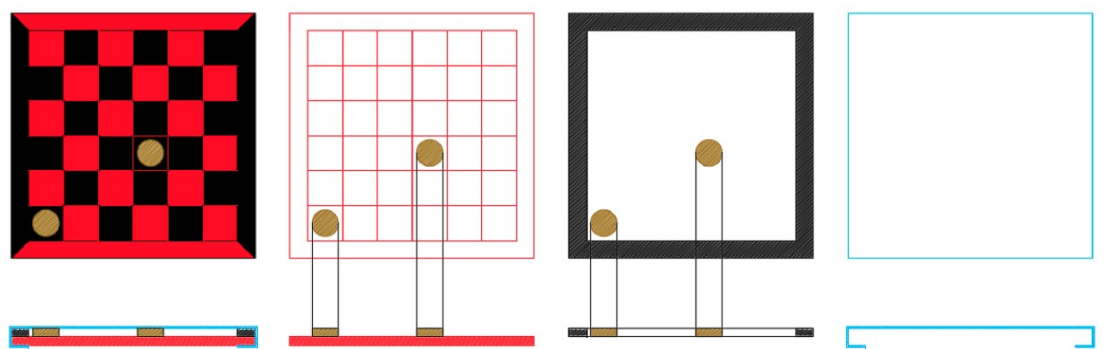
Sur un plateau hexagonal ou carré, rempli par les pions, les joueurs retirent à leur tour un nombre quelconque de pions pourvu qu'ils soient alignés et consécutifs (Le gagnant prend le dernier pion).

Ce jeu est bien connu dans une version particulière utilisant des allumettes

TETRAGO



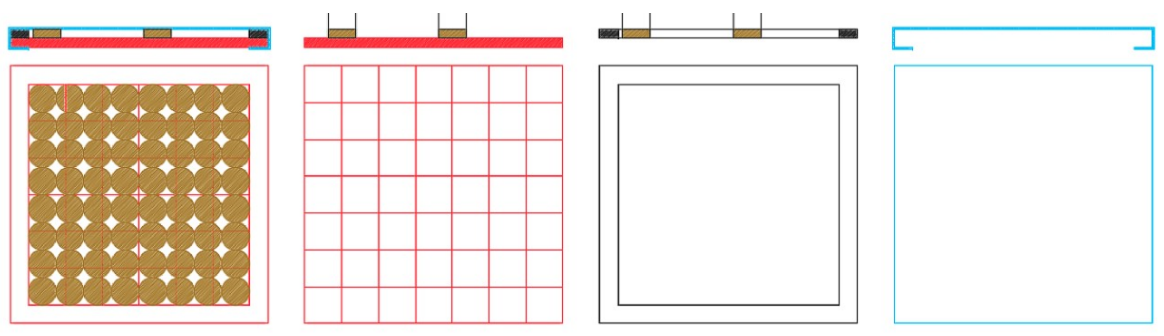
Présentation de la version matérielle de TETRAGO



Les faces supérieures et profils du plateau (6x6)

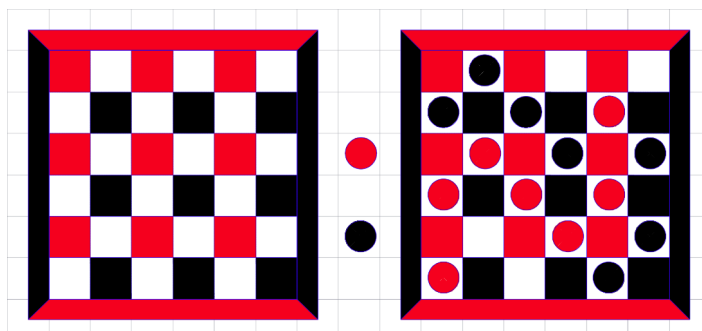
Le plateau est un carré en contreplaqué quadrillé par une grille de *cellules* carrées (20mmx20mm). D'épaisseur 10mm, son socle est formé par la superposition de deux plaques d'épaisseur 5mm : un *sol* recevant les pions de jeu (images 1, 2) et une *bordure* en couronne carrée (image 3) évitant aux pions de s'échapper du plateau. L'ensemble est couvert par un couvercle transparent (plexi, bleu sur image 4) dans lequel le plateau s'insère comme un tiroir contenant les pions et la notice.

La première image représente un jeu fictif utilisant des pions ronds de diamètre 15mm sur un petit plateau (dit 12x12). En rouge la deuxième face (12x12) du jeu (le sol), en noir (image 3) la deuxième plaque (la couronne). Puis en bleu le couvercle transparent (PETG 0.7mm). Au repos (pour ranger le jeu), les pions sont placés sur le plateau et retenus par la couronne carrée (noir ci-dessus) et le couvercle en plexi. Sur un plateau de taille 6x6, on peut ranger $8 \times 8 = 64$ pions (disques bruns sur la première image ci-dessous) entre le plateau et son couvercle, ce qui suffit pour jouer, même sur la deuxième face du plateau (qui offre un plateau de taille 14x14 utilisant au plus $7 \times 7 = 49$ pions comme le montre ces images).



Les faces inférieures et le profil d'un plateau (14x14) de jeu TETRAGO

PONTS et BARRAGES



Les images représentent un plateau en début (à gauche) et en fin de partie (à droite)

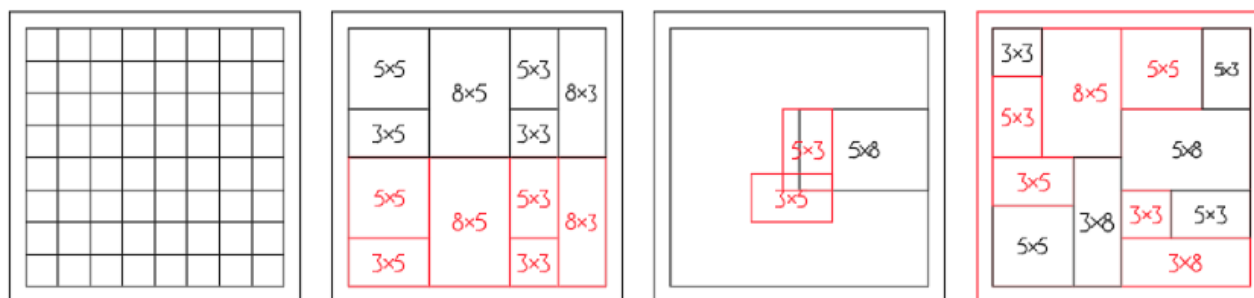
Sur un plateau initialement coloré comme sur la première image, chaque joueur pose à son tour un pion de sa couleur sur une *cellule libre* (blanche). Le joueur qui joint les deux arêtes opposées de sa couleur a gagné (rouge gagne sur cet exemple). Ce jeu existe sous forme électronique (sur téléphone mobile par exemple) :

<https://lutanho.net/play/bridgit.html>

LES CARRELEURS

Règles

Chaque joueur dispose d'un stock de pavés (représentés par leur couleur sur l'image 2, les deux stocks étant bien sûr identiques)



A son tour, chacun pose un pavé de son stock sur un espace *libre* du plateau, et bien sûr, le gagnant est le premier joueur qui place tout son stock sur le plateau...

Mais, lorsque le plateau se remplit, il arrive bien sûr qu'un joueur, gêné par les pavés déjà posés, ne puisse pas placer son pavé, **sauf** s'il enlève des pavés déjà installés (image 3 par exemple, pour poser son pavé 5x8 le joueur noir doit retirer les pavés rouges 5x3 et 3x5, ce qu'il peut faire **à condition** de les rajouter à son stock, ce qui le pénalise...)

La dernière image montre une fin de partie possible

Indications tactiques

Pour gagner chaque joueur cherche à respecter quelques principes tactiques :

- Placer en premier les "gros" pavés (qui prennent beaucoup de place) ...
- Eviter d'enlever des pavés déjà posés (qui viennent alourdir son stock)...
- Essayer de ralentir son adversaire en l'obligeant à enlever des pavés déjà posés

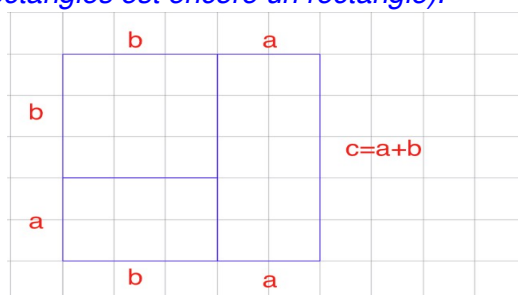
Remarques

1. Le nombre de possibilités de pavages d'une pièce donnée augmente lorsque les longueurs des arêtes des pavés sont en progression de Fibonacci, ce qui rend le puzzle du pavage plus facile aussi bien pour le jeu des Carreleurs que pour d'autres (*voir le commentaire ci-dessous (*)*)

(*) Commentaire



Pour ranger trois segments de longueurs a, b et c sur une ligne droite en minimisant la place qu'ils occupent on les place "bout à bout" pour qu'ils forment un segment de longueur $a+b+c$. Mais cette disposition ne se généralise pas bien aux rectangles puisqu'en général leur réunion n'est pas un rectangle, sauf dans le cas où deux arêtes consécutives forment encore une arête (ci-dessous, la réunion des trois rectangles est encore un rectangle).



Autrement dit si les pavés disponibles sont tels que la somme des longueurs de deux arêtes est encore une arête d'un pavé disponible, il est plus facile de former un rectangle avec trois pavés donnés. Ceci nous conduit à utiliser des pavés dont les arêtes suivent une progression dite de Fibonacci : chacun de ses termes est la somme des deux précédents.

Par exemple

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

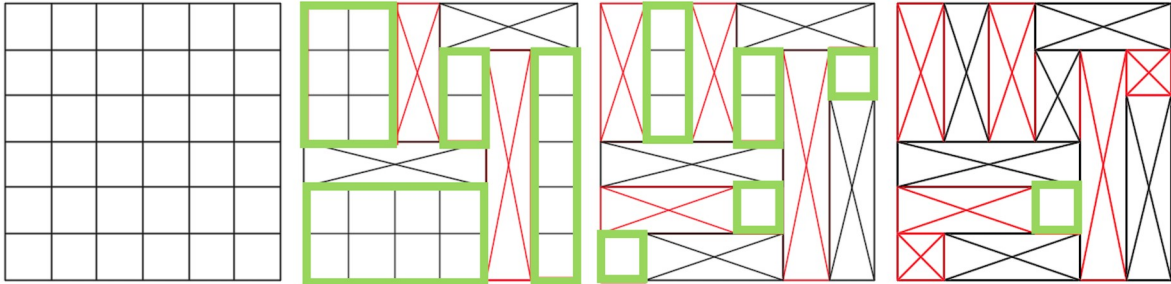
QUELQUES VARIANTES

Le BOWLING CARRÉ est une variante des Carreleurs rappelant le jeu de Marienbad. Les deux joueurs placent à leur tour, une barrette linéaire horizontale ou verticale (*un pavé rectangulaire de largeur 1*) couvrant un nombre quelconque de cellules.

Celui qui pose la dernière barrette (couvrant la dernière case libre) a perdu.

Ci-dessous quelques étapes d'une partie et le stock de barrettes.

Lorsque le nombre de cellules libres est important, il est difficile de prévoir la fin de partie

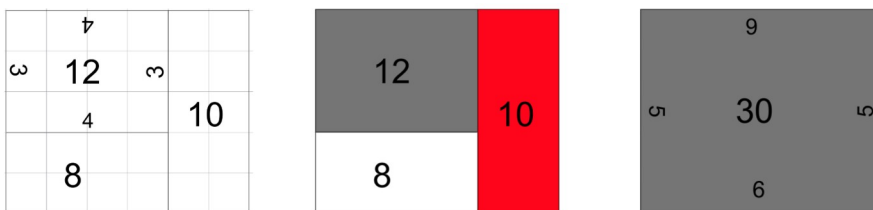


Ci-dessus quelques étapes d'une partie.

Les barrettes posées sont marquées par leurs diagonales et les cellules libres par des rectangles verts

BLOCS

Appelons *bloc* la réunion d'au moins trois pavés du plateau formant un rectangle



Un bloc $30=12+10+8$

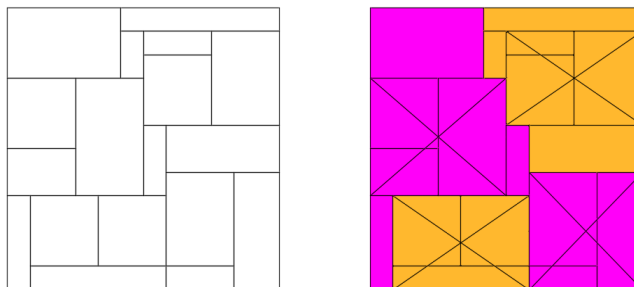
Règles du jeu BLOCS

Les joueurs n'ont pas un stock personnel de pavés mais utilisent un stock commun, non limité.

À son tour chacun J pose, sur une partie *libre* du plateau, un pavé P de taille au plus 12 ⁽¹⁾ pris dans le stock commun. Lorsque P et ses voisins forment un bloc B ⁽²⁾ d'au moins trois pavés, ils sont remplacés par un unique pavé de la couleur de J (*bonus à la formation des blocs*). Une fois le plateau plein le gagnant est le joueur couvrant la plus grande surface

⁽¹⁾ Cette limite, qu'on doit adapter aux dimensions du plateau, évite qu'il soit rapidement couvert par d'énormes pavés. Dans la pratique, pour une version matérielle du jeu, on est limité par les dimensions des pavés disponibles, mais dans une version numérique du jeu cette limite n'est plus indispensable

⁽²⁾ Les pavés formant le bloc B prennent tous la couleur J du dernier pavé posé (Voir la définition d'un bloc dans l'annexe technique qui suit)



Une partie de **blocs** sur un plateau 12x12

Remarque arithmétique

Une disposition en bloc traduit toujours une égalité arithmétique exprimant que la surface du bloc est la somme des surfaces des pavés le constituant. Elle permet aussi de visualiser les règles usuelles d'arithmétique (distributivité, associativité etc.) ainsi que quelques identités dites «*remarquables*»

Les jeux LES CARRELEURS et BLOCS permettent aux enfants d'associer mentalement les nombres ($n=p.q$) à une représentation géométrique (le rectangle $p \times q$) les décomposant naturellement en un produit. Ils incitent aussi à la construction de blocs qui représentent toujours une égalité arithmétique. Sans prétendre remplacer l'apprentissage des règles de calcul, il est probable que, par le jeu, ils facilitent leur assimilation

	a	b			X	Y	
c	axc	bxc	c	X	X ²	X.Y	X
d	axd	bx d	d	Y	Y.X	Y ²	Y
	a	b			X	Y	
	(a+b)x(c+d) = axc + bxc + axd + bx d				(X+Y) ² = X ² + Y ² + 2XY		

Les NOMBRES CROISÉS

FOOB <https://www.formesetobjets.fr>

Introduction

Nombres croisés est un jeu de pions élémentaire se déroulant sur un tableau quadrillé analogue à ceux des mots croisés. Le joueur doit y déposer des pions de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne un nombre de pions imposé dit **poïds** de la ligne (ou colonne).

Comme pour les mots croisés chaque problème est présenté sous forme d'un tableau libre T dont le contour $c(T)$ indique le nombre des pions à placer sur chaque ligne et chaque colonne (à gauche sur l'exemple 1). Le *problème des Nombres Croisés* consiste à placer des pions dans le tableau de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent un nombre imposé de pions.

Toute disposition des pions sur le plateau possède bien sûr un contour, mais il n'est pas sûr qu'inversement tout contour provienne d'une disposition des pions sur le plateau ..., ni qu'elle soit alors unique. Voici quelques exemples avec ou sans solution

	1	3	0	2	1	
2						2
1						1
2						2
1						1
1						1
	1	3	0	2	1	

Contour

	1	3	0	2	1	
2		●		●		2
1					●	1
2		●		●		2
1	●					1
1		●				1
	1	3	0	2	1	

Réponse 1

	1	3	0	2	1	
2		●		●		2
1	●					1
2		●		●		2
1	●					1
1		●				1
	1	3	0	2	1	

Réponse 2

	3	3	1	1	
3					
3					
1					
1					

	3	3	1	1	
3	●	●	●		
3	●	●		●	
1	●				
1		●			

	4	4	4	1	1	
4						
4						
4						
1						
1						

Ici, le dernier exemple n'a pas de solution

Quelques remarques

- Lorsqu'il y a une solution, on la trouve assez facilement
- En géométrie, ces tableaux, dits *matrices d'incidence* sont utilisés pour décrire les relations entre différents éléments géométriques, par exemple indiquer qu'un point est (ou non) sur une droite.
- Ils donnent aussi une caractérisation simple des matrices de permutations (le contour vaut **1**)
- Peut-on trouver une méthode pour obtenir, lorsqu'elle existe, une réponse à chaque problème ?
- Le nombre de pions d'un tableau étant bien sûr indépendant de l'ordre dans lequel on les compte on retrouve une version élémentaire du théorème de Fubini : les sommations par lignes ou par colonnes donnent le même résultat

Un début d'approche mathématique

Notant $LC(M) = L(M) \times c(M)$ le *contour* de toute matrice carrée réelle M , le problème posé incite à regarder le morphisme $M \rightarrow LC(M)$ dont on vérifie quelques propriétés, notamment :

- Les matrices de contour constant forment un sous anneau \mathbf{A} de $M_n(K)$, contenant l'anneau $Z[G]$ engendré par le groupe G des matrices de permutations.

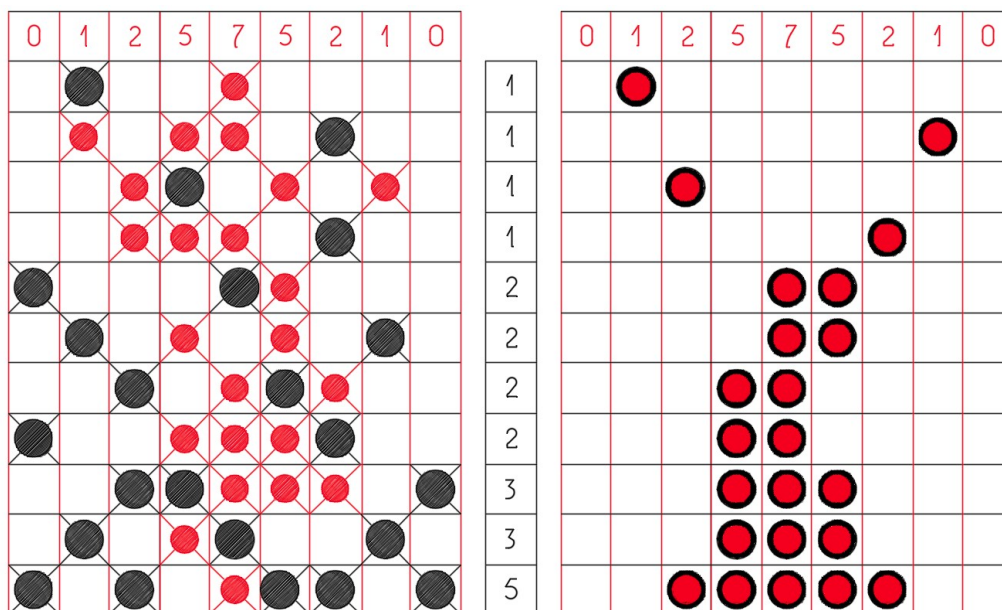
Le morphisme LC restreint à \mathbf{A} est aussi un morphisme d'anneau d'image K

- Le noyau du morphisme LC est engendré par les différences entre deux éléments de G

On donne maintenant deux interprétations du problème des Nombres Croisés

Le Bal des Mariés (ou le Boulier de Fubini)

On assimile le Tableau à une salle de danse contenant sur chaque ligne un nombre donné de danseurs (disques noirs) et sur chaque colonne un nombre donné de danseuses (disques rouges). Sans modifier ces nombres on déplace les danseurs (et danseuses), (chacun restant dans son couloir, ligne ou colonne), pour former des couples de danseurs

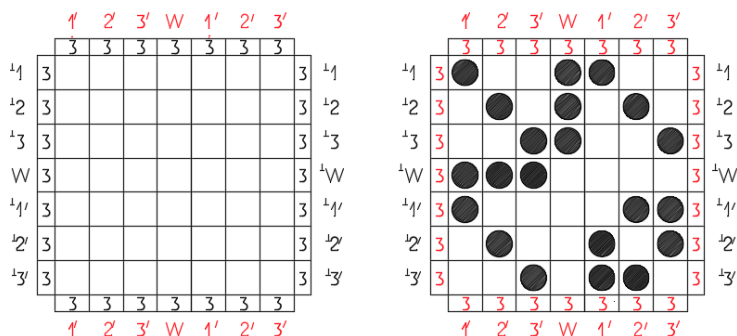
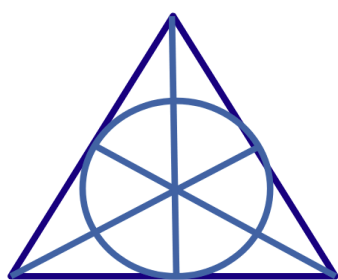


L'appellation **Boulier de Fubini** vient du déplacement des danseurs :

Le nombre total de couples final étant bien sûr égal au nombre de filles ou au nombre de garçons, on retrouve le théorème Fubini affirmant qu'on obtient le même nombre de couple en sommant par ligne (garçons) ou par colonne (filles)

Autres utilisations des tableau de nombres croisés Quelques exemples et commentaires

- L'exemple 1 ci-dessus montre qu'un problème peut admettre plusieurs solutions
- L'exemple 2 qui suit relie les points et les droites d'un plan projectif à 7 points et 7 droites



Le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constant (3)

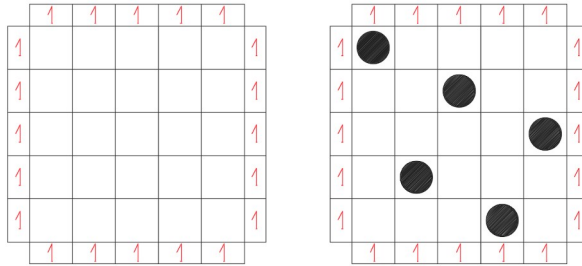
Le nombre de lignes passant par un point est constant (3)

Par deux points passe une unique droite

Deux droites se coupent toujours en un unique point

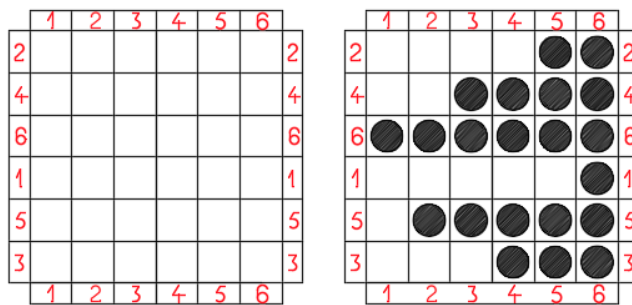
La matrice d'incidence de cette configuration est alors une solution du problème

- L'exemple 3 suivant représente la matrice d'une permutation de 5 points.

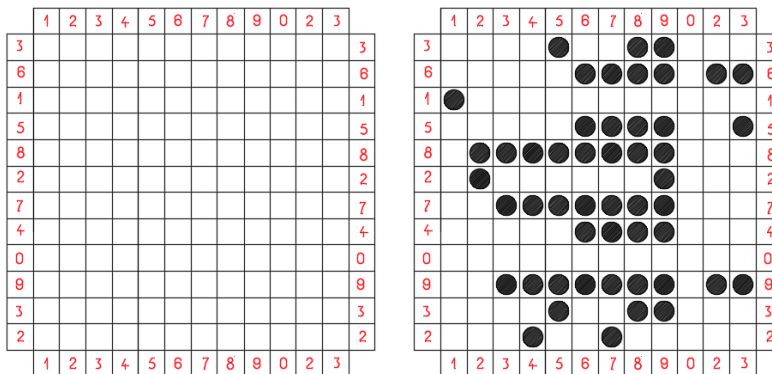
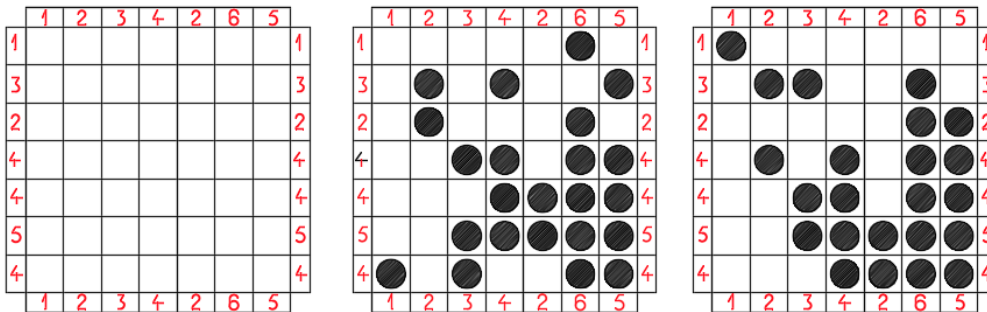


Remarquer qu'ici le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constamment égal à 1, ce qui caractérise les matrices de permutation.
Le problème admet donc exactement $120=5!$ solutions ($5!=1.2.3.4.5$)

L'exemple 4 suivant n'admet qu'une solution. Pourquoi ?



- Les deux exemples (5 et 6) qui suivent sont plus difficiles à résoudre, mais on donne plus loin une méthode pour trouver assez simplement des solutions



Question

Réponse

Une méthode de résolution d'un tableau de type $n \times n$

Pour chaque ligne ou colonne X , son **poide** $[X]_1$ est le nombre de 1 qu'elle doit contenir et X_1 est le nombre de 1 qu'elle contient (donc $X_0 + X_1 = n$ et $[X]_0 + [X]_1 = n$). La ligne ou colonne X est **complete** si $X_1 = [X]_1$ (donc $X_0 = [X]_0$).

Une configuration est dite **Jouable** si pour tout X , $X_1 \leq [X]_1$ (qui équivaut à $X_0 \geq [X]_0$)

* On part d'une matrice **Q (Question)** posant le problème (à gauche sur l'exemple ci-dessus), qui est donc **ouable** puisque toutes les lignes et colonnes satisfont donc à $X_0 = n$ $X_1 = 0$

1. On place alors des 1 (●) dans les cellules $c(i,j)$ intersection des ligne et colonne X, Y telles que $X_1 < [X]_1$ et $Y_1 < [Y]_1$

Après chaque pion posé la configuration reste jouable puisque seules les lignes et colonne X et Y étant modifiées les inégalités ci-dessus reste vraies ou passent en égalités

$$X_1 = [X]_1 \text{ ou } Y_1 = [Y]_1$$

* Lorsque $\{X_1 = [X]_1 \text{ ou } Y_1 = [Y]_1\}$ (ou $\{X_0 = [X]_0 \text{ ou } Y_0 = [Y]_0\}$), on **complete** la ligne ou la colonne par des 0 ou/et des 1 maintenant les égalités $X_1 = [X]_1$ et $X_0 = [X]_0$

Puis on on **complète** ainsi toutes les lignes et colonnes lorsqu'une des égalités $\{X_1 = [X]_1 \text{ ou } Y_1 = [Y]_1\}$ (ou $X_0 = [X]_0 \text{ ou } Y_0 = [Y]_0$) est réalisée

* La matrice est alors dite **saturée**, et reste jouable

2. On retourne en 1

jusqu'à ce que la matrice soit pleine (remplie de 0 et de 1)

3. Par cet algorithme, on remplit la matrice par des 0 et des 1, obtenant alors une matrice **R** qui répond à la question **Q** une fois pleine

Pour une configuration donnée du tableau T , le **poide** de chaque ligne X ou colonne Y , est le nombre $[X]_1$ de 1 qu'elle doit contenir et X_1 est le nombre de 1 qu'elle contient. De même $[X]_0$ est le nombre de 0 qu'elle doit contenir et X_0 est le nombre de 0 qu'elle contient. (idem pour les colonnes Y)

Une configuration est dite **Jouable** si pour tout X, Y $X_1 \leq [X]_1$ et $X_0 \leq [X]_0$ (idem pour les Y)