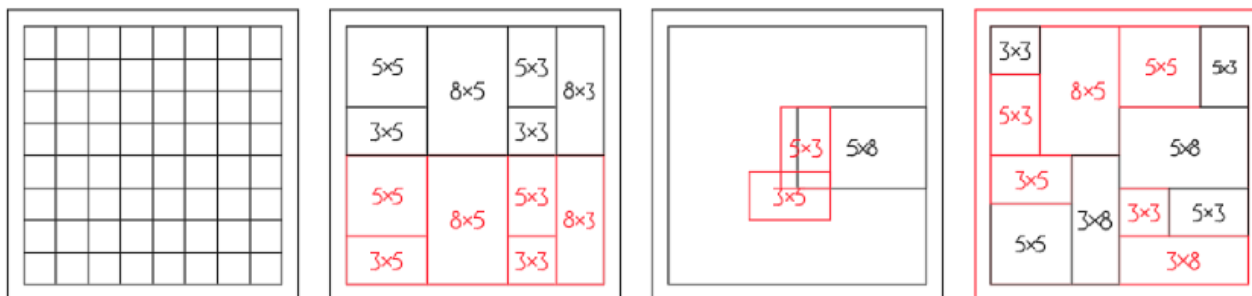


## LES CARRELEURS

### Règles

Chaque joueur dispose d'un stock de pavés (représentés par leur couleur sur l'image 2, les deux stocks étant bien sûr identiques)



A son tour, chacun pose un pavé de son stock sur un espace *libre* du plateau, et bien sûr, le gagnant est le premier joueur qui place tout son stock sur le plateau...

Mais, lorsque le plateau se remplit, il arrive bien sûr qu'un joueur, gêné par les pavés déjà posés, ne puisse pas placer son pavé, **sauf** s'il enlève des pavés déjà installés (image 3 par exemple, pour poser son pavé 5x8 le joueur noir doit retirer les pavés rouges 5x3 et 3x5, ce qu'il peut faire **à condition** de les rajouter à son stock, ce qui le pénalise...)

La dernière image montre une fin de partie possible

### Indications tactiques

Pour gagner chaque joueur cherche à respecter quelques principes tactiques :

- Placer en premier les "gros" pavés (qui prennent beaucoup de place) ...
- Eviter d'enlever des pavés déjà posés (qui viennent alourdir son stock)...
- Essayer de ralentir son adversaire en l'obligeant à enlever des pavés déjà posés

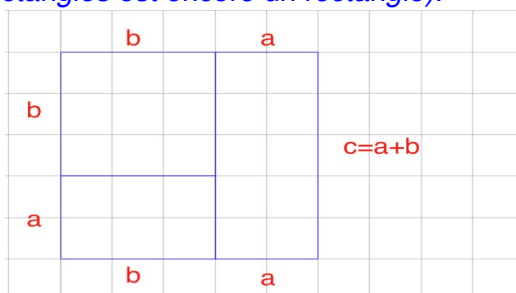
### Remarques

1. Le nombre de possibilités de pavages d'une pièce donnée augmente lorsque les longueurs des arêtes des pavés sont en progression de Fibonacci, ce qui rend le puzzle du pavage plus facile aussi bien pour le jeu des Carreleurs que pour d'autres (*voir le commentaire ci-dessous (\*)*)

#### (\*) Commentaire



*Pour ranger trois segments de longueurs  $a, b$  et  $c$  sur une ligne droite en minimisant la place qu'ils occupent on les place "bout à bout" pour qu'ils forment un segment de longueur  $a+b+c$ . Mais cette disposition ne se généralise pas bien aux rectangles puisqu'en général leur réunion n'est pas un rectangle, sauf dans le cas où deux arêtes consécutives forment encore une arête (ci-dessous, la réunion des trois rectangles est encore un rectangle).*



*Autrement dit si les pavés disponibles sont tels que la somme des longueurs de deux arêtes est encore une arête d'un pavé disponible, il est plus facile de former un rectangle avec trois pavés donnés. Ceci nous conduit à utiliser des pavés dont les arêtes suivent une progression dite de Fibonacci : chacun de ses termes est la somme des deux précédents.*

*Par exemple*

*1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...*

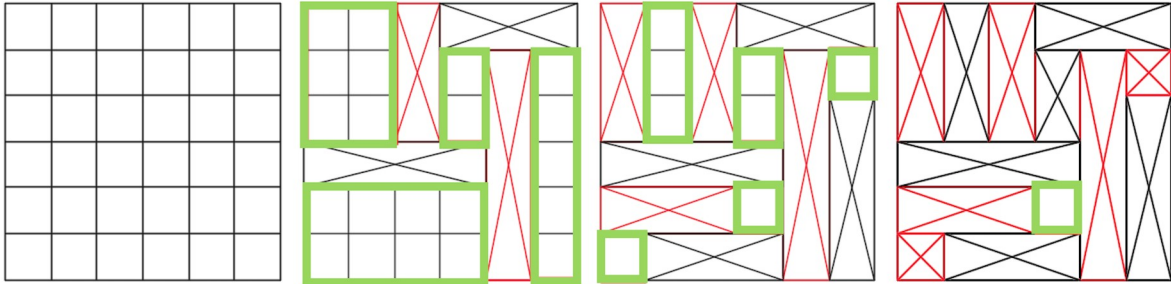
## QUELQUES VARIANTES

**Le BOWLING CARRÉ** est une variante des Carreleurs rappelant le jeu de Marienbad. Les deux joueurs placent à leur tour, une barrette linéaire horizontale ou verticale (*un pavé rectangulaire de largeur 1*) couvrant un nombre quelconque de cellules.

Celui qui pose la dernière barrette (couvrant la dernière case libre) a perdu.

Ci-dessous quelques étapes d'une partie et le stock de barrettes.

Lorsque le nombre de cellules libres est important, il est difficile de prévoir la fin de partie

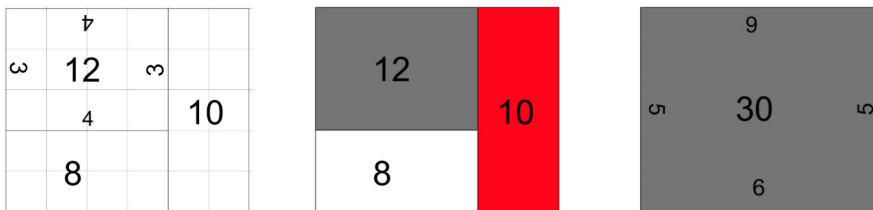


*Ci-dessus quelques étapes d'une partie.*

Les barrettes posées sont marquées par leurs diagonales et les cellules libres par des rectangles verts

## BLOCS

Appelons *bloc* la réunion d'au moins trois pavés du plateau formant un rectangle



Un bloc  $30=12+10+8$

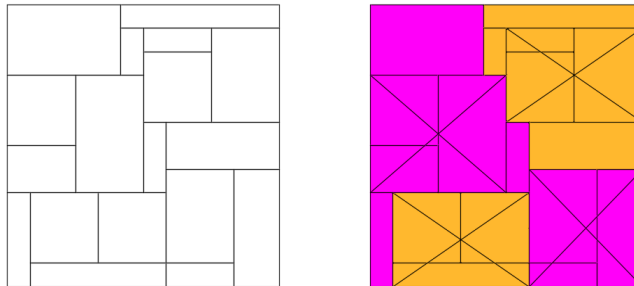
## Règles du jeu BLOCS

Les joueurs n'ont pas un stock personnel de pavés mais utilisent un stock commun, non limité.

À son tour chacun J pose, sur une partie *libre* du plateau, un pavé P de taille au plus 12 <sup>(1)</sup> pris dans le stock commun. Lorsque P et ses voisins forment un bloc B <sup>(2)</sup> d'au moins trois pavés, ils sont remplacés par un unique pavé de la couleur de J (*bonus à la formation des blocs*). Une fois le plateau plein le gagnant est le joueur couvrant la plus grande surface

<sup>(1)</sup> Cette limite, qu'on doit adapter aux dimensions du plateau, évite qu'il soit rapidement couvert par d'énormes pavés. Dans la pratique, pour une version matérielle du jeu, on est limité par les dimensions des pavés disponibles, mais dans une version numérique du jeu cette limite n'est plus indispensable

<sup>(2)</sup> Les pavés formant le bloc B prennent tous la couleur J du dernier pavé posé (Voir la définition d'un bloc dans l'annexe technique qui suit)



Une partie de **blocs** sur un plateau 12x12

### Remarque arithmétique

Une disposition en bloc traduit toujours une égalité arithmétique exprimant que la surface du bloc est la somme des surfaces des pavés le constituant. Elle permet aussi de visualiser les règles usuelles d'arithmétique (distributivité, associativité etc.) ainsi que quelques identités dites «*remarquables*»

Les jeux LES CARRELEURS et BLOCS permettent aux enfants d'associer mentalement les nombres ( $n=p.q$ ) à une représentation géométrique (le rectangle  $p \times q$ ) les décomposant naturellement en un produit. Ils incitent aussi à la construction de blocs qui représentent toujours une égalité arithmétique. Sans prétendre remplacer l'apprentissage des règles de calcul, il est probable que, par le jeu, ils facilitent leur assimilation

	a	b			X	Y	
c	axc	bxc	c	X	X <sup>2</sup>	X.Y	X
d	axd	bxd	d	Y	Y.X	Y <sup>2</sup>	Y
	a	b			X	Y	
	(a+b)x(c+d) = axc + bxc + axd + bxd				(X+Y) <sup>2</sup> = X <sup>2</sup> + Y <sup>2</sup> + 2XY		

## Les NOMBRES CROISÉS

FOOB <https://www.formesetobjets.fr>

### Introduction

Nombres croisés est un jeu de pions élémentaire se déroulant sur un tableau quadrillé analogue à ceux des mots croisés. Le joueur doit y déposer des pions de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne un nombre de pions imposé dit **poïds** de la ligne (ou colonne).

Comme pour les mots croisés chaque problème est présenté sous forme d'un tableau libre T dont le contour  $c(T)$  indique le nombre des pions à placer sur chaque ligne et chaque colonne (à gauche sur l'exemple 1). Le *problème des Nombres Croisés* consiste à placer des pions dans le tableau de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent un nombre imposé de pions.

Toute disposition des pions sur le plateau possède bien sûr un contour, mais il n'est pas sûr qu'inversement tout contour provienne d'une disposition des pions sur le plateau ..., ni qu'elle soit alors unique. Voici quelques exemples avec ou sans solution

	1	3	0	2	1	
2						2
1						1
2						2
1						1
1						1
	1	3	0	2	1	

Contour

	1	3	0	2	1	
2		●		●		2
1					●	1
2		●		●		2
1	●					1
1		●				1
	1	3	0	2	1	

Réponse 1

	1	3	0	2	1	
2		●		●		2
1	●					1
2		●		●		2
1	●					1
1		●				1
	1	3	0	2	1	

Réponse 2

	3	3	1	1	
3					
3					
1					
1					

	3	3	1	1	
3	●	●	●		
3	●	●		●	
1	●				
1		●			

	4	4	4	1	1	
4						
4						
4						
1						
1						

*Ici, le dernier exemple n'a pas de solution*

### Quelques remarques

- Lorsqu'il y a une solution, on la trouve assez facilement
- En géométrie, ces tableaux, dits *matrices d'incidence* sont utilisés pour décrire les relations entre différents éléments géométriques, par exemple indiquer qu'un point est (ou non) sur une droite.
- Ils donnent aussi une caractérisation simple des matrices de permutations (le contour vaut **1**)
- Peut-on trouver une méthode pour obtenir, lorsqu'elle existe, une réponse à chaque problème ?
- Le nombre de pions d'un tableau étant bien sûr indépendant de l'ordre dans lequel on les compte on retrouve une version élémentaire du théorème de Fubini : les sommations par lignes ou par colonnes donnent le même résultat

### Un début d'approche mathématique

Notant  $LC(M) = L(M) \times c(M)$  le *contour* de toute matrice carrée réelle  $M$ , le problème posé incite à regarder le morphisme  $M \rightarrow LC(M)$  dont on vérifie quelques propriétés, notamment :

- Les matrices de contour constant forment un sous anneau  $\mathbf{A}$  de  $M_n(K)$ , contenant l'anneau  $Z[G]$  engendré par le groupe  $G$  des matrices de permutations.

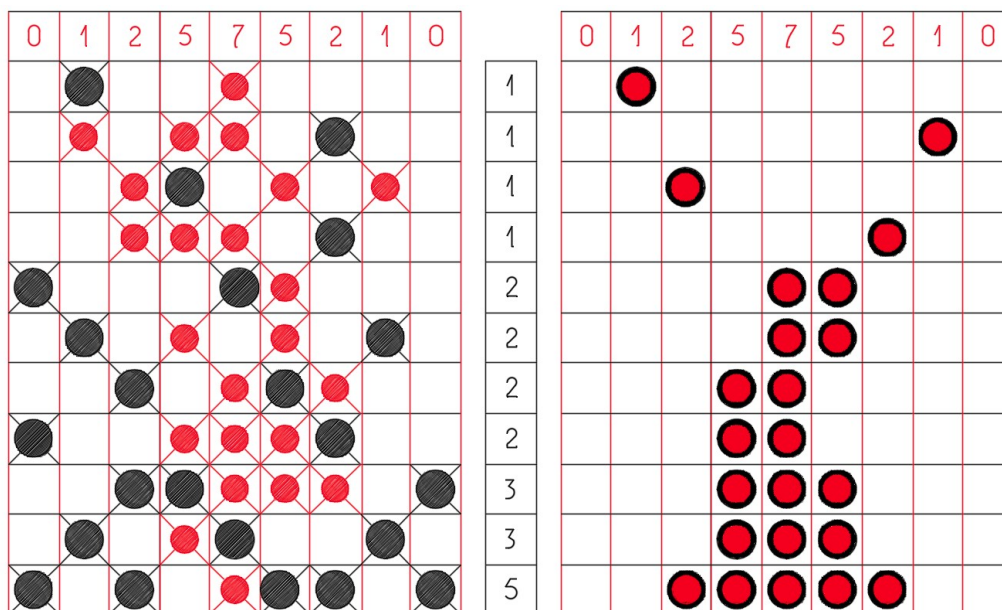
Le morphisme  $LC$  restreint à  $\mathbf{A}$  est aussi un morphisme d'anneau d'image  $K$

- Le noyau du morphisme  $LC$  est engendré par les différences entre deux éléments de  $G$

*On donne maintenant deux interprétations du problème des Nombres Croisés*

### Le Bal des Mariés (ou le Boulier de Fubini)

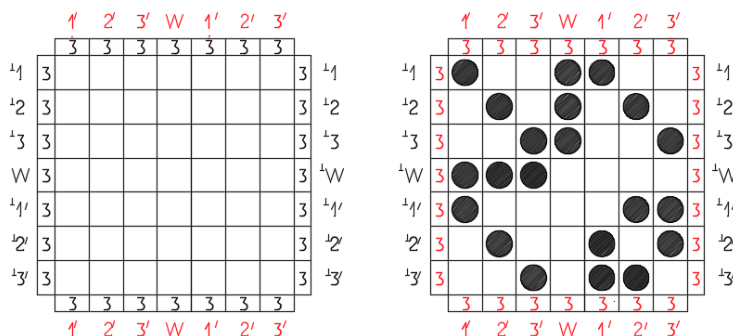
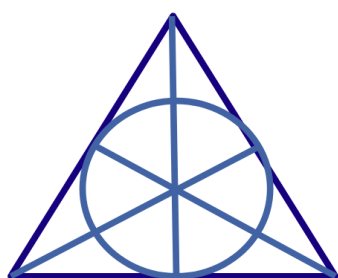
On assimile le Tableau à une salle de danse contenant sur chaque ligne un nombre donné de danseurs (disques noirs) et sur chaque colonne un nombre donné de danseuses (disques rouges). Sans modifier ces nombres on déplace les danseurs (et danseuses), (chacun restant dans son couloir, ligne ou colonne), pour former des couples de danseurs



L'appellation **Boulier de Fubini** vient du déplacement des danseurs : Le nombre total de couples final étant bien sûr égal au nombre de filles ou au nombre de garçons, on retrouve le théorème Fubini affirmant qu'on obtient le même nombre de couple en sommant par ligne (garçons) ou par colonne (filles)

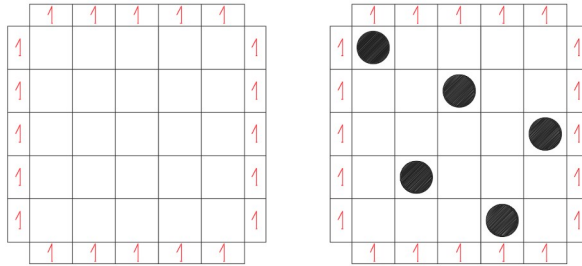
### Autres utilisations des tableau de nombres croisés Quelques exemples et commentaires

- L'exemple 1 ci-dessus montre qu'un problème peut admettre plusieurs solutions
- L'exemple 2 qui suit relie les points et les droites d'un plan projectif à 7 points et 7 droites



- Le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constant (3)
- Le nombre de lignes passant par un point est constant (3)
- Par deux points passe une unique droite
- Deux droites se coupent toujours en un unique point
- La matrice d'incidence de cette configuration est alors une solution du problème

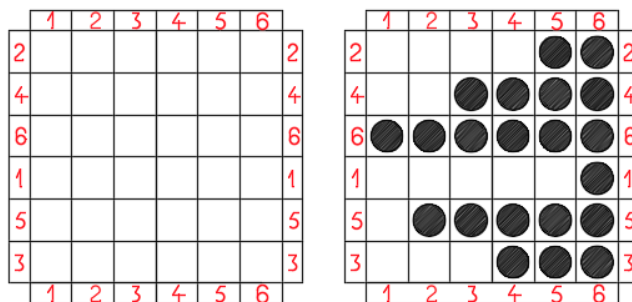
- L'exemple 3 suivant représente la matrice d'une permutation de 5 points.



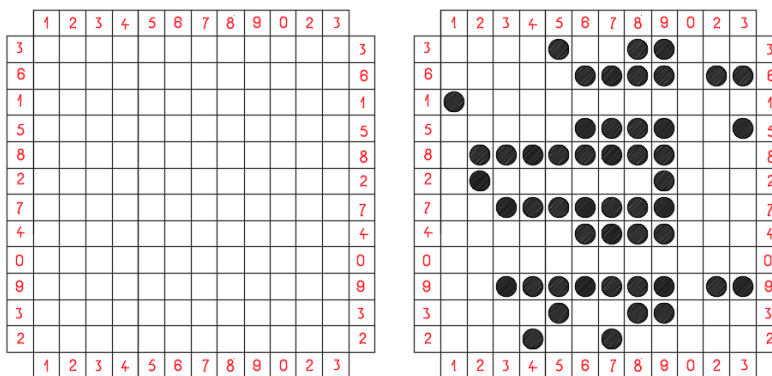
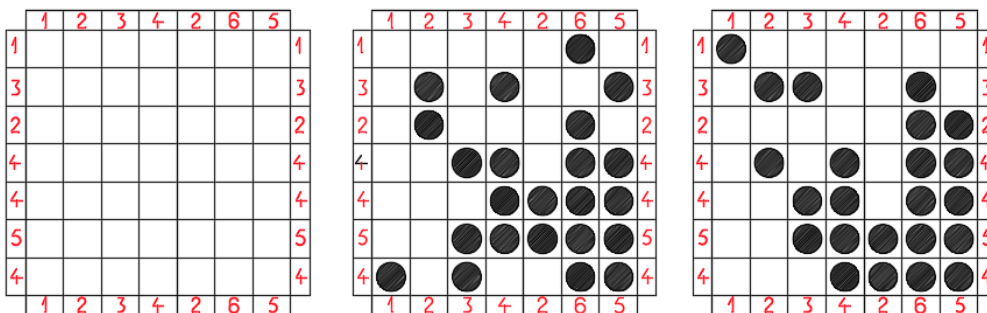
Remarquer qu'ici le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constamment égal à 1, ce qui caractérise les matrices de permutation.

Le problème admet donc exactement  $120=5!$  solutions ( $5!=1.2.3.4.5$ )

L'exemple 4 suivant n'admet qu'une solution. Pourquoi ?



- Les deux exemples (5 et 6) qui suivent sont plus difficiles à résoudre, mais on donne plus loin une méthode pour trouver assez simplement des solutions



*Question*

*Réponse*