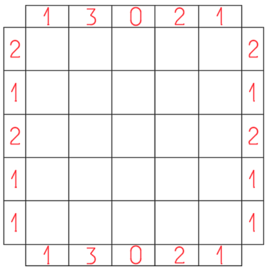
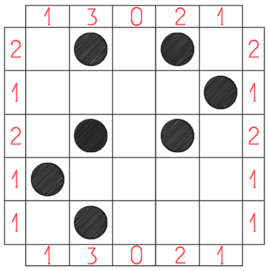
Les NOMBRES CROISÉS **FOOB** https://www.formesetobjets.fr

Introduction

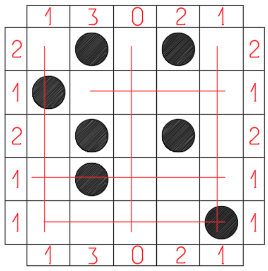
Nombres croisés est un jeu de pions élémentaire se déroulant sur un tableau quadrillé analogue à ceux des mots croisés. Le joueur doit y déposer des pions de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne un nombre de pions imposé dit **poids** de la ligne (ou colonne).
Comme pour les mots croisés chaque problème est présenté sous forme d'un tableau libre T dont le contour c(T) indique le nombre des pions à placer sur chaque ligne et chaque colonne (à gauche sur l'exemple 1). Le *probleme des Nombres Croisés* consiste à placer des pions dans le tableau de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent un nombre imposé de pions.
Toute disposition des pions sur le plateau possède bien sûr un contour, mais il n'est pas sûr qu'inversement tout contour provienne d'une disposition des pions sur le plateau …, ni qu'elle soit alors unique. Voici quelques exemples avec ou sans solution



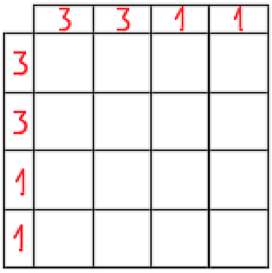
Contour

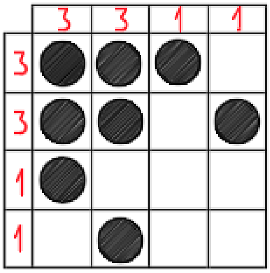


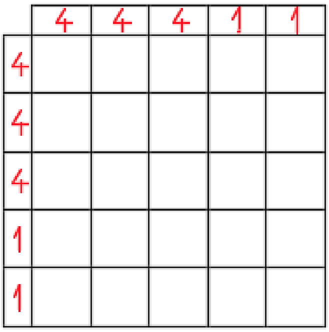
Réponse 1



Réponse 2







Ici, le dernier exemple n'a pas de solution

Quelques remarques

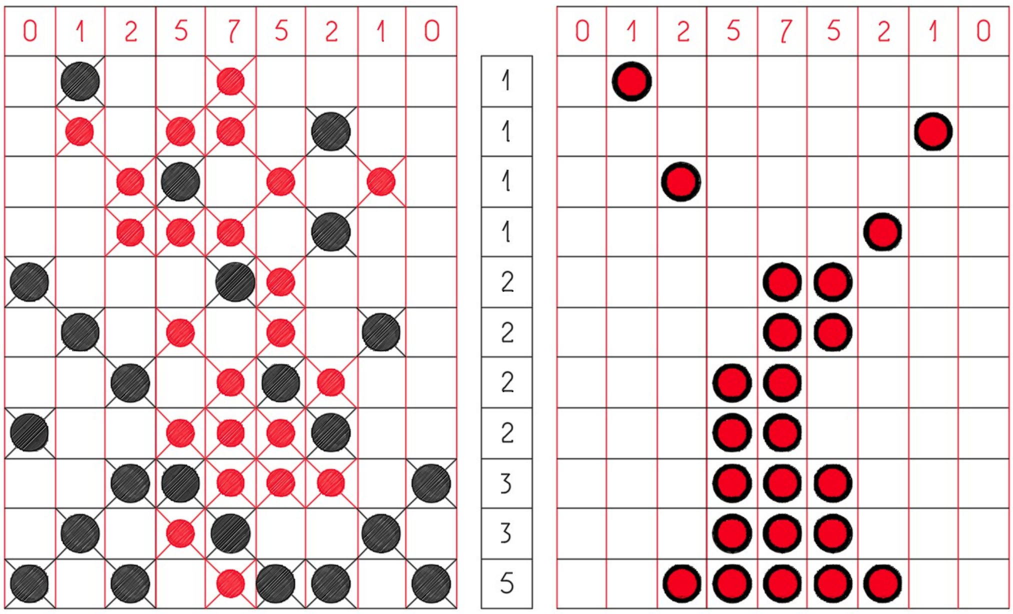
- Lorsqu'il y a une solution, on la trouve assez facilement
– En géometrie, ces tableaux, dits *matrices d'incidence* sont utilisés pour décrire les relations entre différents éléments géométriques, par exemple indiquer qu'un point est (ou non) sur une droite.
- Ils donnent aussi une caractérisation simple des matrices de permutations (le contour vaut **1**)
- Peut on trouver une méthode pour obtenir, lorsqu'elle existe, une réponse à chaque problème ?
- Le nombre de pions d'un tableau étant bien sûr indépendant de l'ordre dans lequel on les compte on retrouve une version élémentaire du théorème de Fubini : les sommations par lignes ou par colonnes donnent le même résultat

Un début d'approche mathématique

Notant LC(M) =L(M)xc(M) le *contour* de toute matrice carrée réelle M.
Le problème posé incite à regarder le morphisme M → LC(M) dont on vérifie quelques propriétés, notamment :
- Les matrices de contour constant forment un sous anneau **A** de Mn(K), contenant l'anneau Z[G] engendré par le groupe G des matrices de permutations.
Le morphisme LC restreint à **A** est aussi un morphisme d'anneau d'image dans K
- Le noyau du morphisme LC est engendré par les différences entre deux éléments de G

Voici deux interprétations du *problème des Nombres Croisés*

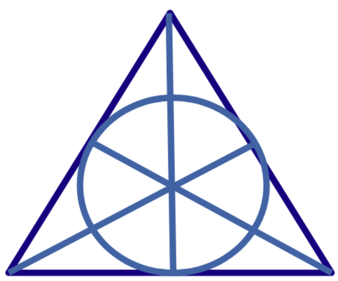
Le **Bal des Mariés** (ou le **Boulier de Fubini**)
On assimile le Tableau à une salle de danse contenant sur chaque ligne un nombre donné de danseurs () et sur chaque colonne un nombre donné de danseuses (rouges). Sans modifier ces nombres on déplace les danseurs (et danseuses), (chacun restant dans son couloir, ligne ou colonne), pour former des couples de danseurs

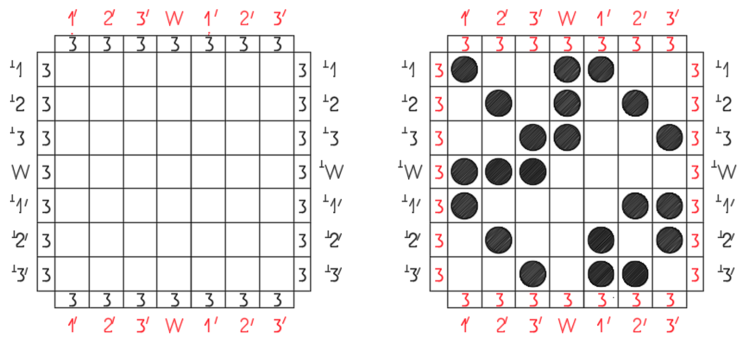


L'appellation **Boulier de Fubini** vient du déplacement des danseurs :
Le nombre total de couples étant bien sûr égal au nombre de filles ou au nombre de garçons, on retrouve le théorème Fubini affirmant qu'on obtient le même nombre de couple en sommant par ligne (garçons) ou par colonne (filles)

Autres utilisations des tableau de nombres croisés
Quelques exemples et commentaires

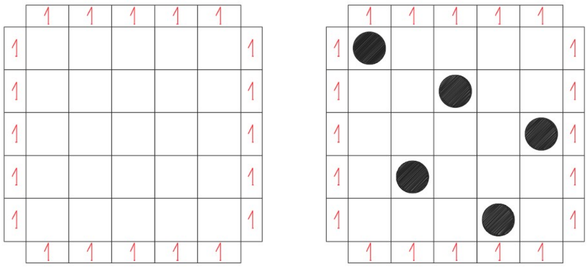
- L'**exemple 1** ci-dessus montre qu'un problème peut admettre plusieurs solutions
- L'**exemple 2** qui suit relie les points et les droites d'un plan projectif à 7 points et 7 droites





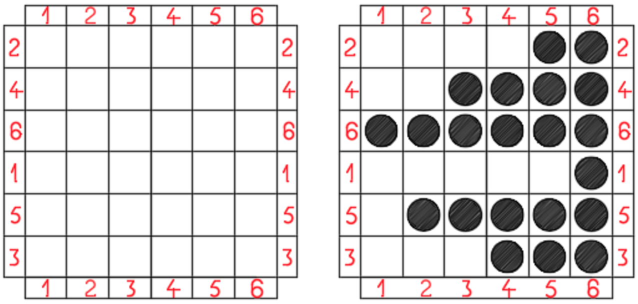
Le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constant (3)
Le nombre de lignes passant par un point est constant (3)
Par deux points passe une unique droite
Deux droites se coupent toujours en un unique point
La matrice d'incidence de cette configuration est alors une solution du problème

- L’**exemple 3** suivant représente la matrice d’une permutation de 5 points.

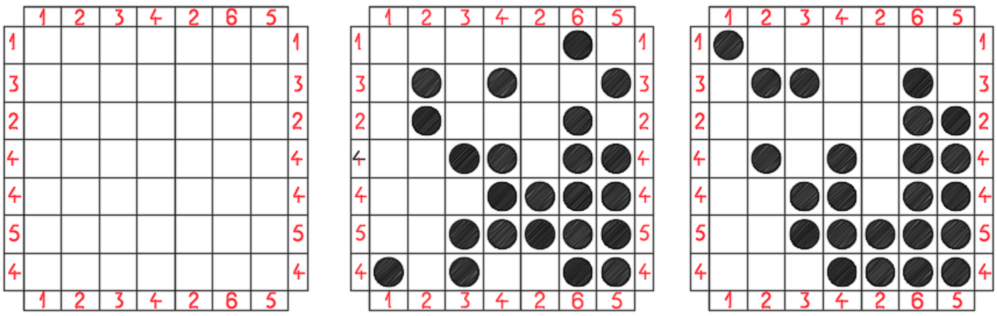


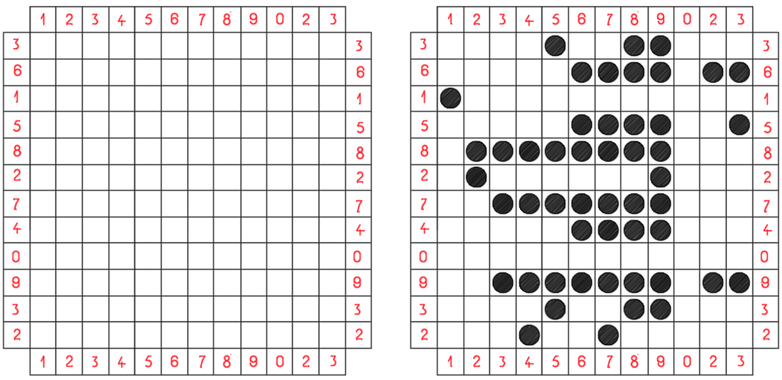
Remarquer qu’ici le nombre de pions sur chaque ligne ou colonne est constamment égal à 1, ce qui caractérise les matrices de permutation.
Le problème admet donc exactement 120=5! solutions (5!=1.2.3.4.5)

L’**exemple 4** suivant n’admet qu’une solution. Pourquoi ?



- Les deux e**xemples (5 et 6)** qui suivent sont plus difficiles à résoudre, mais on donne plus loin une méthode pour trouver assez simplement des solutions





Question *Réponse*