

POLYGO (24 mars 2026)

Dans ce document, on propose deux modèles de plateaux, qu'on adapte à différents jeux de pions. Le premier, TetraGo repose sur une trame carrée et le second HexaGo, sur une trame hexagonale. Les jeux développés sur ces plateaux rappellent les classiques jeux de Go ou de Hex, ce qui explique la terminologie retenue. Succincte table des matières :

- p 1 Généralités sur les pavages
- p 2 Le jeu PolyGo et ses déclinaisons (TetraGO, HexaGO-TriaGO). Dualité des graphes
- p 4 Hex multi-joueurs : Hex-2, Hex- 3, ..., Hex-n
- p 6 TetraGo et ses variantes : pavages arithmétiques et de Fibonacci (Les Carreleurs, Blocs)
- p 7 Ponts et Barrages. Les Nombres Croisés. Les Carreleurs. Blocs.

Les termes nouveaux sont indiqués en *italique rouge* puis repris en *italique noir*.
Les *commentaires sont en bleu*

Terminologie des Pavages

Ce premier paragraphe clarifie l'utilisation de termes courants dans le cadre particulier des jeux de pions.

Principalement utilisées pour le jeu PolyGO présenté ensuite, on peut l'omettre en première lecture.

On ne redéfinit pas les polygones, leurs arêtes et leurs sommets, l'incidence entre leurs composantes (sommets arêtes est souvent formulée simplement si aucune ambiguïté n'est à craindre (on dira par exemple: "une arête de R" au lieu de "une arête incidente à un polygone de la région R").

Un **pavage P** plan (*ou de dimension 2*) est un ensemble de *polygones* dits aussi *cellules*, chacune étant bordée par des *arêtes*, dont les extrémités sont ses *sommets*. Elles satisfont aux propriétés

- P1.** Chaque *arête* de **P** est incidente à une ou deux *cellules* de **P**
- P2.** Deux *arêtes* de **P** sont incidentes à, au plus, une *cellule* de **P**

Chaque *cellule* est affectée d'une couleur associée aussi à un pays et un joueur. Les blanches, dites aussi *maritimes*, ou *inoccupées*, forment l'*océan* et les autres, dites *terrestres* forment la *terre*. Deux *cellules* terrestre sont *alliées* si elles sont de même couleur et *adversaires* dans le cas contraire

2. Distance, liaison, connexité,, séparation, barrage

Deux sommets (resp. arêtes) distinct(e)s sont *voisin(e)s* si ils (elles) partagent une même arêtes (resp. un même sommet) . Une suite d'arêtes (ou sommets) successivement *voisin(e)s* est une *ligne*, dite *fermée*, ou *lacet* si la première et la dernière sont *voisines* ou confondu(es).

De même deux *cellules* distinctes sont *voisines* lorsqu'elles sont séparées par une arête commune, et une suite de *cellules* successivement *voisines* est un *chemin*, dit *fermé*, ou *circuit* si la première et la dernière sont *voisines* ou confondues.

Une *province* est une partie **P** du plateau, monochrome *connexe* (*c'est à dire dont deux quelconques de ses cellules sont reliées par un chemin dans P*), et maximale pour cette propriété.

Remarquons que deux provinces voisines et de même couleur sont identiques

Une *région* est une union de *provinces*. Elle est *terrestre* (resp. *maritime*) si toutes ses *cellules* le sont.

On remarque que la classe des régions est stable par les opérations ensemblistes usuelles

Une partie **L** du plateau **P** est un *lien* entre deux *provinces* **A** et **B** si l'union **AUBUL** est une partie connexe, et un *joint* si de plus son cardinal est minimal. Noté $d(A,B)$, il est alors la *distance* entre **A** et **B** (*restreinte aux provinces d'une même couleur, la fonction 'd' est une distance au sens mathématique*)

3. Bord, Contour, Clôture, Frontière, Intérieur, Péninsules et Littoral

Les arêtes *séparant* deux *cellules voisines* d'une région **R** sont dites *intérieures* à **R**, les autres forment sa *clôture*. Une cellule dont toutes les arêtes sont intérieures à **R** est elle même *intérieure* à **R**. Les autres sont au *bord* de **R** ainsi que toute province les contenant. Enfin le *contour* de **R** est le bord de sa région complémentaire R^c . L'*adhérence* d'une région **R** est la réunion de **R** et son contour.

Les provinces terrestres au *bord* du plateau **P** sont des *péninsules*. Leurs cellules, forment le *Littoral* et sont dites *solides*, les autres étant qualifiées de *fragiles*

La *frontière* entre deux provinces distinctes est l'intersection de leurs *clôtures* et toute arête de cette frontière sépare deux *cellules* de couleurs distinctes

Précisons enfin qu'une *province maritime* est une *mer* si elle est au bord du plateau et un *lac* sinon

4. Province cernée, libre ou isolée

Une province est *cernée* par un ensemble **X** de cellules si elle est intérieure au plateau et si son contour est dans **X**. Elle est *libre* si on peut la relier au *littoral* par un chemin monochrome. Sinon elle est dite *isolée* (*)

() Une province est isolée si elle est contenue dans une région connexe cernée par le littoral*

POLYGO

(pour deux joueurs ou plus)

Le jeu se déroule entre plusieurs joueurs représentés par des couleurs (*autres que blanc*), sur un plateau **P** muni d'un pavage arbitraire. Les *cellules* inoccupées dites aussi *maritimes*, sont blanches.

But et Déroulement du jeu

1. But du jeu :

Obtenir le plus grand pays (*le plus grand nombre de pions sur le plateau*)

2. Déroulement du jeu

Etape 1.a. À son tour chaque joueur J pose un pion de sa couleur sur une *cellule libre*

1.b. On retire du plateau les provinces *isolées*, et les remplace par la couleur de leur contour s'il est monochrome

Etape 2. Tant qu'il reste des cellules libres, on passe au joueur suivant

Lorsqu'il n'y en a plus, le littoral recouvre le plateau et le gagnant possède le plus grand pays (*)

(*) Preuve : Dire qu'il n'y a plus de cellule libre équivaut à dire que le contour du littoral L est terrestre.

Son complémentaire L^c étant alors isolé, il est blanc (car vidé de ses pions, par l'Etape 1b).

Donc, par l'absurde, si L^c n'était pas vide, les cellules du contour de L étant inoccupées, elles seraient simultanément libres et isolées, d'où la contradiction montrant que L^c est vide, donc L recouvre le plateau

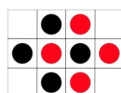
Quelques remarques

-- Dire qu'il n'y a plus de cellule libre, revient à dire que le littoral L cerne son complémentaire L^c .

-- Au jeu de Go (deux joueurs), les pions encerclés sont retirés du jeu, puis réintroduits en fin de partie pour faciliter le décompte des points. Dans le jeu **PolyGo**, ils prennent immédiatement la couleur de leur assaillant

-- Au jeu de Go les provinces contenant "deux yeux" sont protégées tandis que pour **Polygo** les provinces protégées sont les péninsules (*rattachés au bord du plateau, donc faciles à identifier*), mais une province P de J contenant deux yeux n'est plus nécessairement protégée car, si P n'est pas une péninsule, un pion placé dans l'un d'eux n'est pas immédiatement capturé et remplacé par J.

-- Certaines configurations du jeu de Go sont ambiguës si on ne sait pas dans quel ordre ont été posés les pions. Par exemple dans la situation qui suit, au Go, on ne peut pas savoir lequel des deux pions centraux est capturé si on ne sait pas dans quel ordre ils sont posés. Alors que pour PolyGo, si les 6 pions extérieurs sont solides, les deux pions centraux sont supprimés et la situation ne peut pas se reproduire

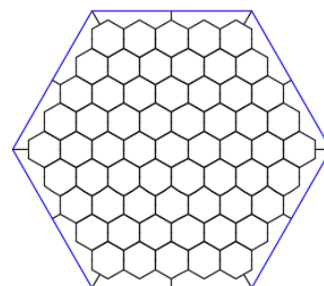
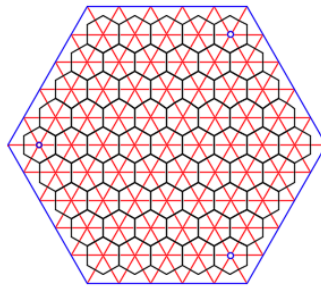
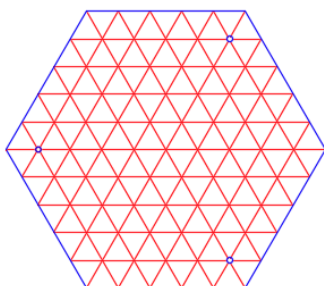


-- Le jeu PolyGo peut se dérouler sur un pavage arbitraire avec plus de deux joueurs, et une initialisation arbitraire des couleurs des bords du plateau, laquelle permet d'instaurer des handicaps.

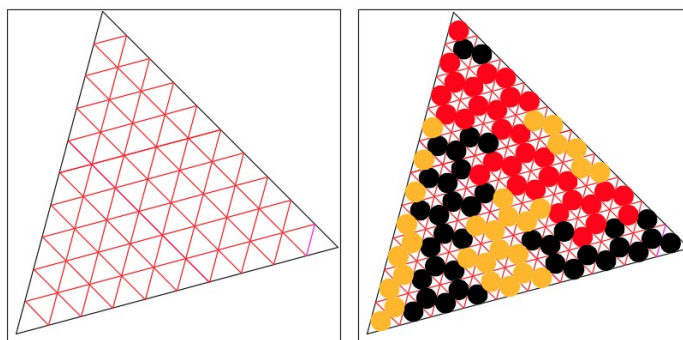
-- Pour le jeu Polygo une tactique *défensive* prudente semble être de toujours jouer ses pions au voisinage d'une de ses péninsules... mais les adversaires peuvent fabriquer des lacs qui sont des pièges redoutables.

-- Symétrie et dualité

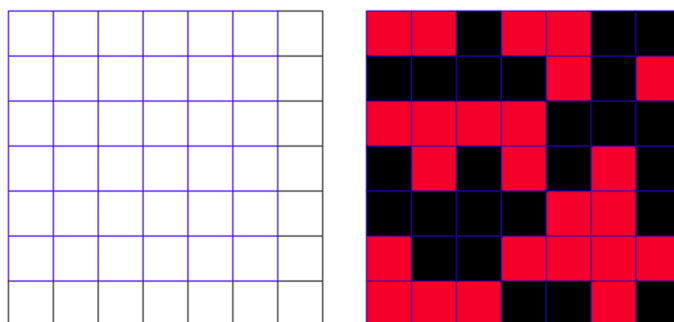
Remarquons que les pavages hexagonaux (**hexago**) et triangulaires (**triago**) étant chacun dual de l'autre, un même plateau convient pour les deux jeux puisque la seule différence vient du positionnement des pions de jeu sur le plateau, au centre des polygones ou sur leur sommets comme le montre cette représentation simultanée des deux pavages de l'hexagone. La page suivante représente un début et une fin de partie se déroulant sur un plateau de pavage triangulaire (**Triago**), carré (**Tetrago**) ou hexagonal (**Hexago**)



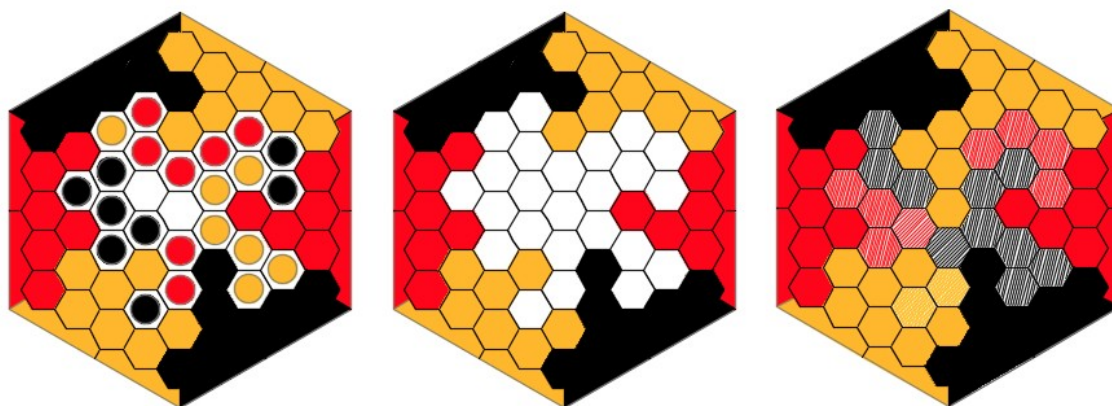
Voici des images de début et fin de partie pour un plateau Triangulaire (**TriaGO**),...



... carré (**TetraGO**),...



.... ou hexagonal (**HexaGO**)



Ci-dessus Trois étapes d'une partie à trois joueurs (GO3) sur un plateau HexaGO

Etape1

Le littoral L (pions solides) cerne les pions fragiles (représentés par les jetons de couleur) et les deux cellules vides restantes, libres pour aucun des joueurs, sont isolées

Etape 2

Donc les pions fragiles (et isolés), sont supprimés du plateau et la partie reprend.

Etape 3

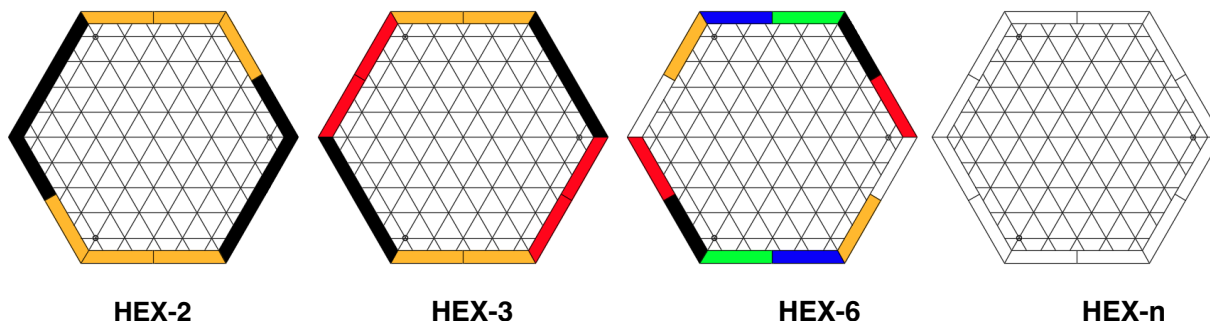
Lorsque le plateau est couvert par le littoral (les péninsules solides), le gagnant possède le plus grand pays (les pions grisés ont été posés après la deuxième étape)

On montre maintenant comment la forme hexagonale du plateau permet d'adapter les règles d'autres jeux classiques (par exemple Hex) à trois joueurs ou plus

HEX-n généralise à plus de deux joueurs le classique jeu de Hex (voir 5 (*), un peu plus loin)

Sur un plateau hexagonal chaque joueur J dispose de deux **ports** diamétralement opposés qu'il tente de relier par un chemin continu de pions de sa couleur (dit aussi **diamètre** de J). Dès que ses adversaires forment un barrage rendant ce but impossible, il *abandonne* la partie bien que ses pions restent sur le plateau, et le jeu continue entre ses adversaires. Sinon il pose un pion où bon lui semble sur une *cellule libre* du plateau. Le gagnant, qui existe nécessairement, relie ses deux ports par un diamètre, barrant du même coup la route de ses adversaires.

Ci-dessous quelques dispositions initiales d'un plateau (correspondant au nombre n de joueurs)



- a. **HEX-2** Le bord du plateau est divisé en quatre ports disposés symétriquement (*voir la première image*). On retrouve le jeu classique de Hex pour lequel, tout plateau rempli, même aléatoirement, détermine un gagnant qui relie ses deux ports et élimine donc son adversaire.
- b. **HEX-3** et **HEX-6** généralisent Hex-2 à trois ou six joueurs. Mais, si un plateau rempli aléatoirement ne détermine plus nécessairement un gagnant (traçant un diamètre), les abandons successifs des perdants assurent la victoire du dernier survivant qui trace donc un diamètre de sa couleur.
- c. **HEX-n** apporte une variante intéressante : les couleurs des ports ne sont pas initialement attribuées, mais dès que deux d'entre eux sont reliés par un chemin de couleur J, ils adoptent immédiatement cette couleur J

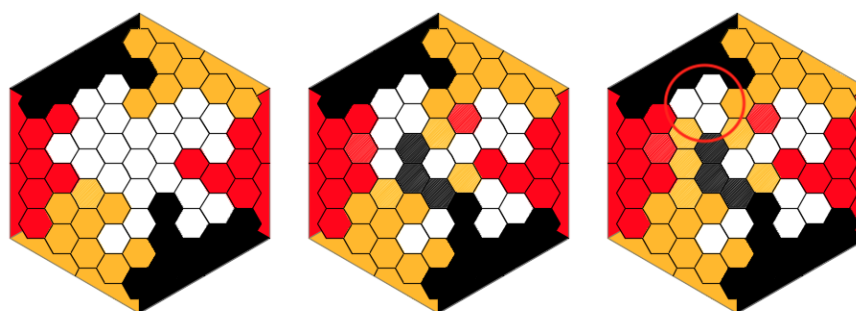
Remarques

- 1. Pour les petits plateaux (H5 ayant cinq cellules sur chaque arête) le jeu est rapide (5 à 10 minutes), mais se complique avec la taille du plateau pour devenir un jeu de réflexion assez complexe (H7 ou plus grand)
- 2. Il est facile de voir que deux diamètres distincts du plateau se coupent nécessairement, donc si un joueur J trace un diamètre, les autres, ne pouvant plus y parvenir, abandonnent et J gagne la partie

3. La règle du swap

Le premier qui joue se trouve un peu avantagé (notamment s'il prend la position centrale), ce qui est particulièrement sensible quand on joue sur un «petit plateau». Aussi, pour compenser cet avantage, on introduit une règle dite du **swap** : après le premier pion posé (par le joueur 1), si le joueur 2 trouve le coup intéressant, il peut prendre la place du joueur 1 (et son premier coup). Ainsi, pour commencer, le joueur 1 doit choisir une *cellule* suffisamment bonne pour lui, mais pas trop pour éviter que son adversaire prenne sa place, ce qui équilibre le jeu. Une variante du swap consiste à interdire à chaque joueur de poser son premier pion au centre du plateau

- 4. Exemple montrant trois étapes clés d'une partie de Hex-3 (trois joueurs)



Ci dessus

3 étapes d'une partie à trois joueurs Hex-3

Etape 1 Chaque joueur peut gagner

Etape 2 Ne pouvant plus joindre ses deux ports, le joueur rouge est éliminé

Etape 3 Noir ou Jaune gagne en 1 ou 2 coups en jouant dans l'une des cellules encadrées.

- 5. (*) Les articles sur le jeu Hex sont nombreux (*commencez par wikipédia ou recherchez simplement «jeu de Hex » dans votre navigateur*)

Mais le plateau Polygo peut aussi servir pour d'autres jeux, comme on le montre maintenant

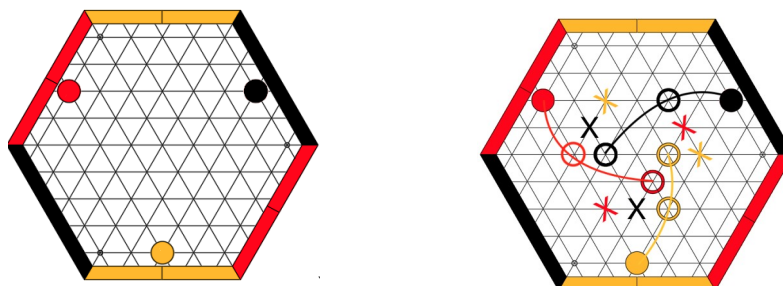
QUELQUES VARIANTES et AUTRES RÈGLES *(envisageables sur un plateau PolyGO)*

1. Labyrinthe est une variante du jeu Quoridor (se déroulant, lui avec deux joueurs sur un plateau carré)

On y joue à plusieurs joueurs sur un plateau se présentant comme celui de Hex

Chaque joueur dispose d'un «**Roi**» voisin d'un port . Son but est de lui faire traverser le plateau pour rejoindre le port opposé. A son tour, il peut :

- Déplacer son Roi sur une *cellule libre* voisine, ou
- Poser une **pierre** (X) sur une *cellule libre* du plateau, la rendant ainsi inutilisable dans tous les déplacements des rois. Cette pose est définitive.



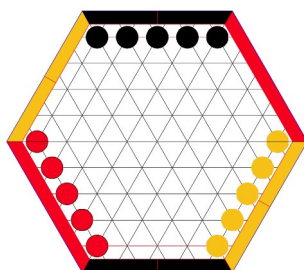
Sur ces deux dessins on essaie de représenter les déplacements des rois et les pierres obstacles (X, X, X)

La difficulté, pour chaque joueur, est de choisir, à son tour, s'il est préférable d'avancer son roi ou de gêner un adversaire en posant une pierre sur son chemin.

Pour que le jeu se termine toujours par un roi gagnant on doit y ajouter deux règles

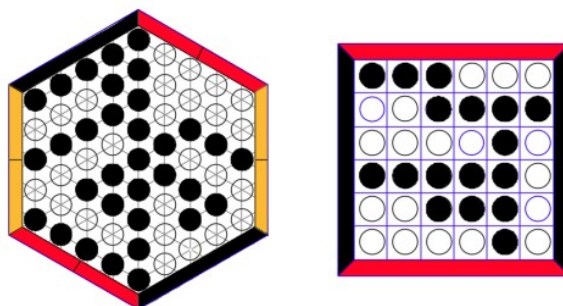
1. L'interdiction de poser une pierre barrant définitivement tout chemin gagnant d'un roi
2. Lorsque deux rois sont voisins celui qui joue peut choisir d'échanger leur position (ce qui permet leur croisement même sur une voie étroite)

2. HexaDames est une variante du jeu de Dames adaptée à trois joueurs, sur le plateau Hexago
En début de partie, chacun range ses pions sur une arête du plateau comme sur cette image (*).



Chaque joueur tente de transférer ses pions sur l'arête opposée en les déplaçant, à son tour, d'un seul pas, sauf pour manger un ou plusieurs pions adverses en sautant par dessus (à «saute mouton» comme au jeu de *Dames* traditionnel). Le gagnant est le joueur qui transfère le plus de pions d'un bord à l'autre

3. Variantes du jeu de Marienbad (https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Marienbad)

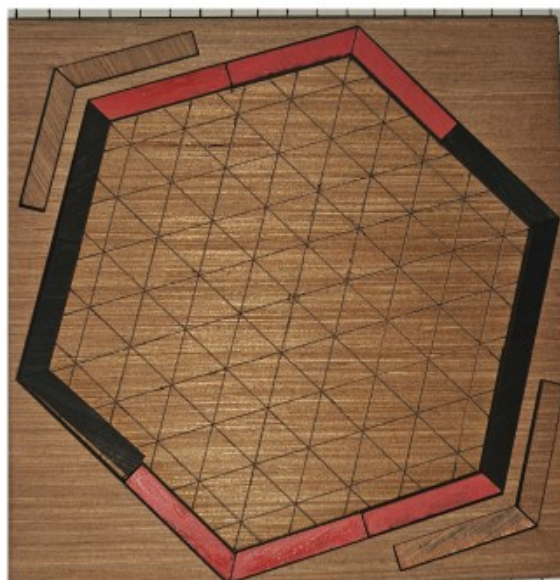
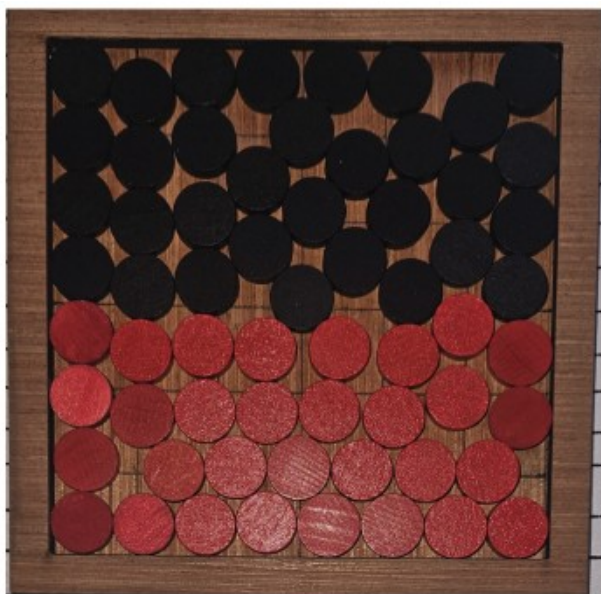


Exemples de parties en cours sur les plateaux HexaGo et TetraGo

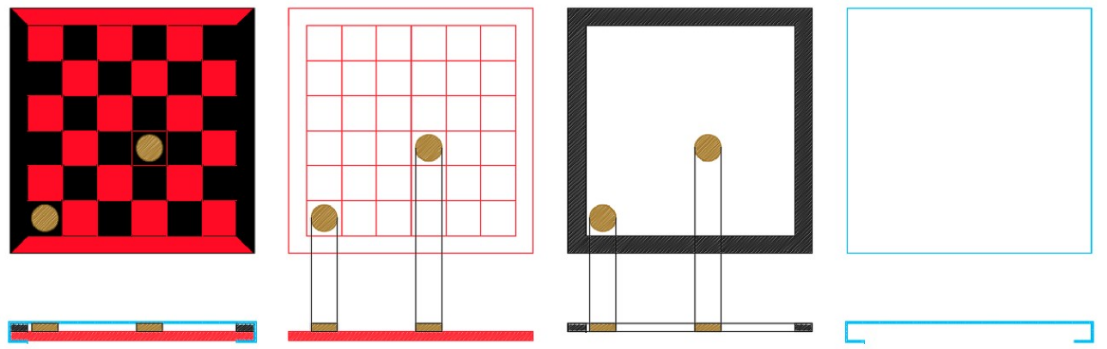
Sur un plateau hexagonal ou carré, rempli par les pions, les joueurs retirent à leur tour un nombre quelconque de pions pourvu qu'ils soient alignés. Le gagnant prend le dernier pion).

Ce jeu est bien connu dans une version particulière utilisant des allumettes

TETRAGO



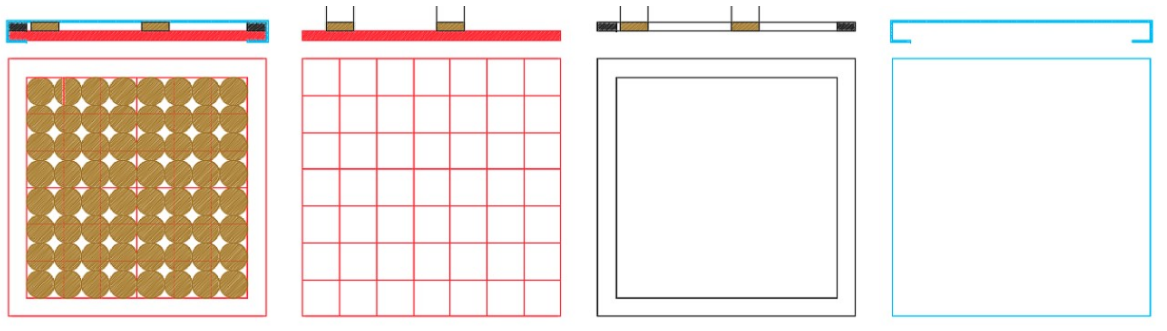
Présentation de la version matérielle de TETRAGO



Les faces supérieures et profils du plateau (6x6)

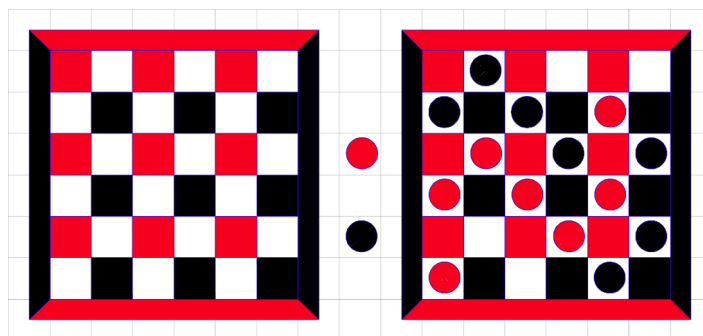
Le plateau est un carré en contreplaqué quadrillé par une grille de *cellules* carrées (20mmx20mm). D'épaisseur 10mm, son socle est formé par la superposition de deux plaques d'épaisseur 5mm : un *sol* recevant les pions de jeu (images 1, 2) et une *bordure* en couronne carrée (image 3) évitant aux pions de s'échapper du plateau. L'ensemble est couvert par un couvercle transparent (plexi, bleu sur image 4) dans lequel le plateau s'insère comme un tiroir contenant les pions et la notice.

La première image représente un jeu fictif utilisant des pions ronds de diamètre 15mm sur un petit plateau (dit 12x12). En rouge la deuxième face (12x12) du jeu (le sol), en noir (image 3) la deuxième plaque (la couronne). Puis en bleu le couvercle transparent (PETG 0.7mm). Au repos (pour ranger le jeu), les pions sont placés sur le plateau et retenus par la couronne carrée (noir ci-dessus) et le couvercle en plexi. Sur un plateau de taille 6x6, on peut ranger $8 \times 8 = 64$ pions (disques bruns sur la première image ci-dessous) entre le plateau et son couvercle, ce qui suffit pour jouer, même sur la deuxième face du plateau (qui offre un plateau de taille 14x14 utilisant au plus $7 \times 7 = 49$ pions comme le montre ces images).



Les faces inférieures et le profil d'un plateau (14x14) de jeu TETRAGO

PONTS et BARRAGES

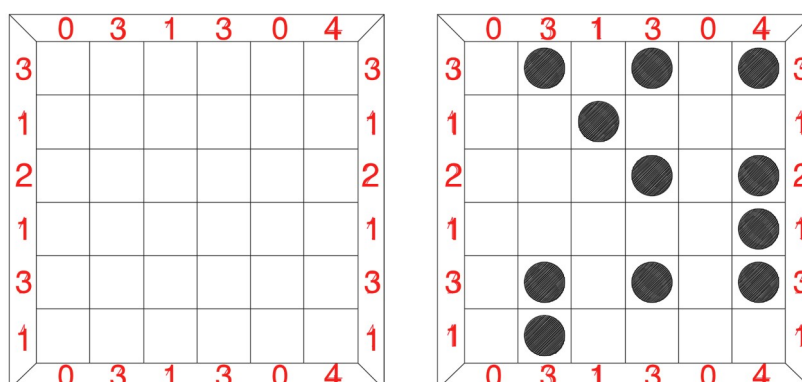


Les images représentent un plateau en début (à gauche) et en fin de partie (à droite)

Sur un plateau initialement coloré comme sur la première image, chaque joueur pose à son tour un pion de sa couleur sur une *cellule libre* (blanche). Le joueur qui joint les deux arêtes opposées de sa couleur a gagné (rouge gagne sur cet exemple). Ce jeu existe sous forme électronique (sur téléphone mobile par exemple) :

<https://lutanho.net/play/bridgit.html>

NOMBRES CROISÉS (ou QR nombres, nombres carrés ?)



Les nombres croisés

Un mot est une suite de lettres mais une suite de lettres ne forme pas toujours un mot. De même lorsque des pions sont posés sur le plateau, s'il est facile de compter combien se trouvent sur chaque ligne et sur chaque colonne, l'opération inverse (placer les pions si on ne connaît que leurs sommes en ligne ou en colonne) est plus délicat comme on peut facilement s'en rendre compte sur cet exemple

Plusieurs questions se posent naturellement

- Le problème admet il toujours une solution ? Si oui est elle unique ?
- Peut on trouver un algorithme de recherche de solution ?
- Lien avec l'écriture en Braille :

L'écriture braille utilise un rectangle 2x3 pour représenter les chiffres et les lettres par une grille de points. Combien de grilles peut on former sur un rectangle 2x3 ? (rep. $2^6 = 64$), ... et sur une grille 6x6 ? (rep. $2^{36} = 68\ 719\ 476\ 736$, qui est aussi le nombre de dispositions de pions sur le plateau TetraGo 6X6).

D'où l'utilité des QR-code (2^{625} dispositions possibles des cellules noires sur une grille de 25x25) Petit jeu pour clore ce paragraphe.

Une seule disposition des pions noirs est cohérente avec cete grille. Pouvez vous la remplir ?

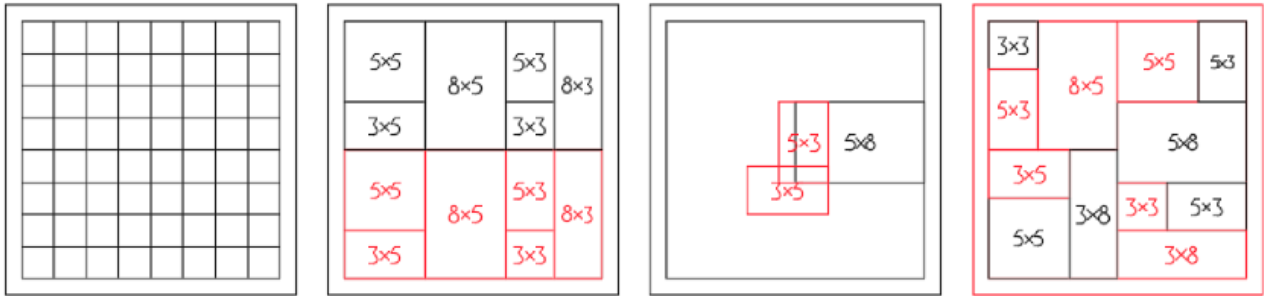
	1	2	3	4	5	6	7	8	
3									3
6									6
1									1
5									5
8									8
2									2
7									7
4									4
	1	2	3	4	5	6	7	8	

<https://www.linkedin.com/feed/update/urn:li:activity:7424743087945699328/>

LES CARRELEURS

Règles

Chaque joueur dispose d'un stock de pavés (représentés par leur couleur sur l'image 2, les deux stocks étant bien sûr identiques)



A son tour, chacun pose un pavé de son stock sur un espace *libre* du plateau, et bien sûr, le gagnant est le premier joueur qui place tout son stock sur le plateau...

Mais, lorsque le plateau se remplit, il arrive bien sûr qu'un joueur, gêné par les pavés déjà posés, ne puisse pas placer son pavé, **sauf** s'il enlève des pavés déjà installés (image 3 par exemple, pour poser son pavé 5x8 le joueur noir doit retirer les pavés rouges 5x3 et 3x5, ce qu'il peut faire à **condition** de les rajouter à son stock, ce qui le pénalise...)

La dernière image montre une fin de partie possible

Indications tactiques

Pour gagner chaque joueur cherche à respecter quelques principes tactiques :

- Placer en premier les "gros" pavés (qui prennent beaucoup de place) ...
- Eviter d'enlever des pavés déjà posés (qui viennent alourdir son stock)...
- Essayer de ralentir son adversaire en l'obligeant à enlever des pavés déjà posés

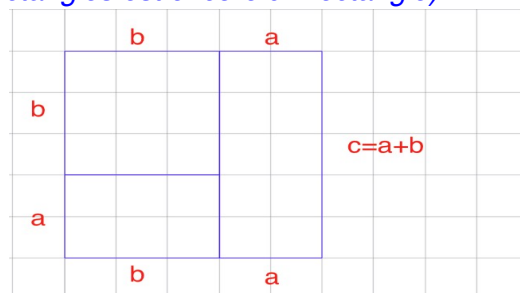
Remarques

1. Le nombre de possibilités de pavages d'une pièce donnée augmente lorsque les longueurs des arêtes des pavés sont en progression de Fibonacci, ce qui rend le puzzle du pavage plus facile aussi bien pour le jeu des Carreleurs que pour d'autres (*voir le commentaire ci-dessous (*)*)

(*) Commentaire



Pour ranger trois segments de longueurs a, b et c sur une ligne droite en minimisant la place qu'ils occupent on les place "bout à bout" pour qu'ils forment un segment de longueur $a+b+c$. Mais cette disposition ne se généralise pas bien aux rectangles puisqu'en général leur réunion n'est pas un rectangle, sauf dans le cas où deux arêtes consécutives forment encore une arête (ci-dessous, la réunion des trois rectangles est encore un rectangle).

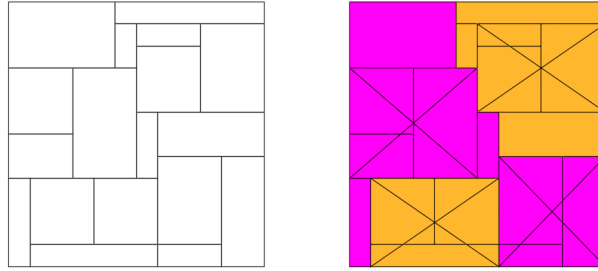


Autrement dit si les pavés disponibles sont tels que la somme des longueurs de deux arêtes est encore une arête d'un pavé disponible, il est plus facile de former un rectangle avec trois pavés donnés. Ceci nous conduit à utiliser des pavés dont les arêtes suivent une progression dite de Fibonacci : chacun de ses termes est la somme des deux précédents.

Par exemple

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

BLOCS



Une partie de **blocs** sur un plateau 12x12

Règles

Les joueurs n'ont pas de stock personnel mais utilisent un stock commun, non limité.

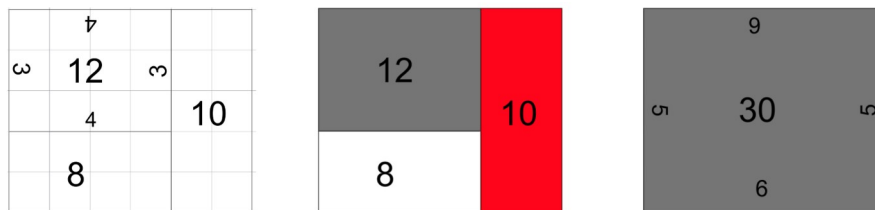
À son tour chaque joueur J pose, sur une partie *libre* du plateau, un pavé P de taille au plus 12 ⁽¹⁾ pris dans le stock commun. Lorsque P et ses voisins forment un bloc B ⁽²⁾ d'au moins trois pavés, ils sont remplacés par un unique pavé de la couleur de J (*bonus à la formation des blocs*). Une fois le plateau plein le gagnant est le joueur couvrant la plus grande surface

⁽¹⁾ Cette limite, qu'on doit adapter aux dimensions du plateau, évite qu'il soit rapidement couvert par d'énormes pavés. Dans la pratique, pour une version matérielle du jeu, on est limité par les dimensions des pavés disponibles, mais dans une version numérique du jeu cette limite n'est plus indispensable

⁽²⁾ Les pavés formant le bloc B prennent tous la couleur J du dernier pavé posé (Voir la définition d'un bloc dans l'annexe technique qui suit)

Annexe technique (BLOC)

Appelons *bloc* la réunion d'au moins trois pavés du plateau formant un rectangle



Exemple

Un bloc $30=12+10+8$

Une disposition en bloc traduit toujours une égalité arithmétique exprimant que la surface du bloc est la somme des surfaces des pavés le constituant. Elle permet aussi de visualiser les règles usuelles d'arithmétique (distributivité, associativité etc.) ainsi que quelques identités dites «*remarquables*»

	a	b			X	Y	
c	axc	bxc	c	X	X ²	X.Y	X
d	axd	bxd	d	Y	Y.X	Y ²	Y
	a	b		X	Y		
	$(a+b) \times (c+d) = axc + bxc + axd + bxd$			$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$			

Les jeux LES CARRELEURS et BLOCS permettent aux enfants d'associer mentalement les nombres ($n=p.q$) à une représentation géométrique (le rectangle $p \times q$) les décomposant naturellement en un produit. Ils incitent aussi à la construction de blocs qui représentent toujours une égalité arithmétiques. Sans prétendre remplacer l'apprentissage des règles de calcul, il est probable que, par le jeu, ils facilitent leur assimilation